

人の運動の数理モデル ver.0.0.1

幾何モデル・力学モデル・近似モデル

真鍋 周平

The Publisher トヨタ自動車陸上競技部

目次

第 I 部 幾何モデル	6
第 1 章 計算準備	9
1.1 座標系の定義	9
1.2 角度の定義	11
1.3 ヤコビアン <small>の</small> 計算	14
1.4 剛体リンクモデルの一般化	16
1.5 ヤコビアン <small>の</small> 一般化	18
第 2 章 可操作性楕円体	20
2.1 楕円体の概念	20
2.2 関節角速度ベクトルを使ったヤコビ行列計算	21
2.3 楕円体の導出方法	23
2.4 特異値分解の計算方法	26
2.5 可操作性楕円体の計算例	27
2.6 数値シミュレーションによる計算	30
第 3 章 様々な楕円体	32
3.1 筋空間・関節空間・作業空間	32
3.2 各座標空間の関係性	33
3.3 様々な楕円体モデル	39
第 4 章 楕円体モデルの計算	41
4.1 2次元2リンクモデルの楕円体	41
4.2 2次元3リンクモデルの楕円体	43
関連図書	50
索引	52

前書き

人の運動を数理モデルを使って分析することは難しい。人の体はマクロに見れば複数のセグメントが関節軸でリンク状に連結された自由度の高いリンクモデル構造を持ち、3次元空間で位置や角度を変えながら複雑な運動を行うことができる。

また、ミクロに見れば一つ一つのセグメントは無数の筋や腱で接続されており、その筋は収縮する方向や速度によって出せる力の大きさが異なることが知られている。しかもその複雑な制御対象をシンプルな有機体（脳）で制御している（残念ながらその方法はまだよく分かっていない）。

これだけきくと人の運動を数理モデルを使って分析するのは難しいことのように思えるかもしれないが、様々な研究者が数を多くの数理モデルを提案し、極めて限定的な適用範囲であるが、人の運動の真理を数理モデルで語る事が可能になってきた。

ここでは著者である私の経験をもとに、人の運動を扱う数理モデルのうち、実用的なもの、理工系の大学生の一般教養程度の知識があれば容易に理解できるものをいくつか取り上げて紹介する。

本書が多くの若い技術者に読まれ、人の運動の真理の探究に役立ててもらえれば幸いである。

編集履歴

日付	編集内容
2022/4/10	新規に作成を開始する
2022/10/5	第一部の暫定版を発行

表 1: 編集履歴

本書の読み方

本書は理工系の大学生（学部生）向けに作成したものである。一般教養程度の知識があることを前提に説明しており、細かい式の導出や、一般的な公式の証明などは省略している（一般教養の知識を超えた内容についてはなるべく丁寧な説明を記載している）。

このため、高校生や人文学系の学生にとっては、かなり無理のある、理解が困難な内容となっていると考えられる。各部の冒頭でその数理モデルを使って人の運動のどんな分析が可能なのか、簡単に概要を説明しているため、冒頭の説明のみを読み、理論の詳細は無視して読み進めることをおすすめする。

人の運動を扱う数理モデルの多くは、複雑であり、非線形であり、解析解を求めることはできないため、その多くは数値シミュレーションによって分析される。

本書は実用を重視して編集しているため、数値シミュレーションのプログラミングを行うために必要となる計算式や、変数の定義、計算順序（アルゴリズムのフロー）についてはできるだけ丁寧に説明している。このため、くどくどした前提条件や定義の説明や、計算方法の説明が多いが、実用を重視しての説明ということでご容赦してほしい。

第I部
幾何モデル

第I部では線形代数を理解していれば比較的容易に扱える楕円体モデルを紹介する [1][2].

楕円体モデルでは関節角度をわずかに動かした場合に手先が動く範囲(可操作性楕円体), 関節トルクをわずかに発生させた場合に手先で発生する力の大きさ(可操作力楕円体)を評価することが可能であり, 人の筋空間・関節空間・作業空間の関係性を記述した式を用いることで比較的容易にその解を求めることができる.

例えば腕を前後に動かしたときの可操作性楕円体(青)と可操作力楕円体(緑)は図1のように計算することができる.

可操作性楕円体(青)を見ると, 手先を肩関節に近い位置では上下方向よりも前後方向のほうが手先が動かしやすい方向になっており, 手先が肩関節から遠い位置では前後方向よりも上下方向のほうが手先を動かしやすい方向になっていることが分かる.

また, 可操作力楕円体(緑)を見ると, 手先を肩関節に近い位置では前後方向よりも上下方向のほうが手先の力が出しやすい方向になっており, 手先が肩関節から遠い位置では上下方向よりも前後方向のほうが手先の力が出しやすい方向になっている.

人の感覚とは多少のズレがあるものの, 人の動作感覚に近い計算結果が得られるいることが分かる.

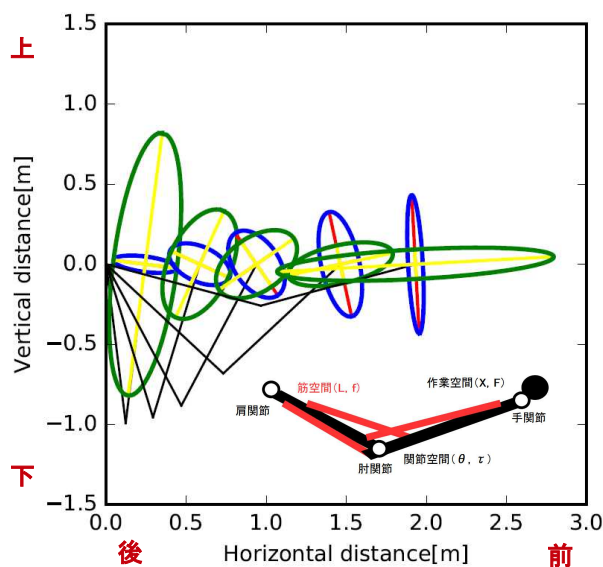


図 1: 楕円体モデルの計算例

本書では可操作力楕円体（緑）を使ったフルスクワット，ハーフスクワット，クォータースクワットの最大挙上重量の分析も行っている．図2，図3がその計算結果であり，人を使った計測値と可操作力楕円体から計算した理論値が同じような傾向を示していることが分かる（グラフ中の数字はフルスクワットのときの最大挙上重量を1.00とした場合の最大挙上重量の比率を表している）．

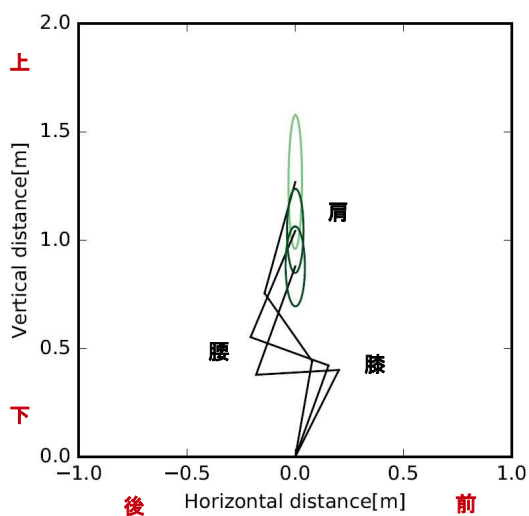


図 2: 楕円体モデルの計算例 2

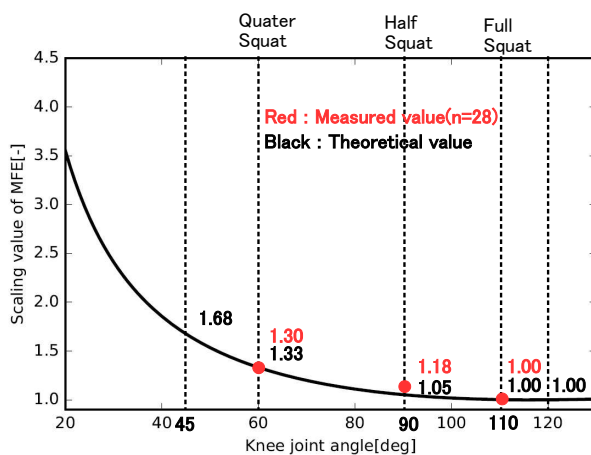


図 3: 計算結果のグラフ 3

計算準備

1.1 座標系の定義

空間のある位置の固定された基準となる座標系を基準座標系と呼ぶ。基準座標系は絶対座標系，ワールド座標系，グローバル座標系と呼ばれることもある。次に基準座標系から見た場合の，物体に固定され，物体上に原点を持つ座標系を物体座標系と呼ぶ。物体座標系はローカル座標系，ボディ座標系と呼ばれることもある。

図 1.1 に示すように基準座標系を Σ_A の原点を O_A とし，直行する 3 つの座標軸を X_A, Y_A, Z_A とする。ある物体座標系 Σ_B の原点を O_B とし，直行する 3 つの座標軸を X_B, Y_B, Z_B とする。

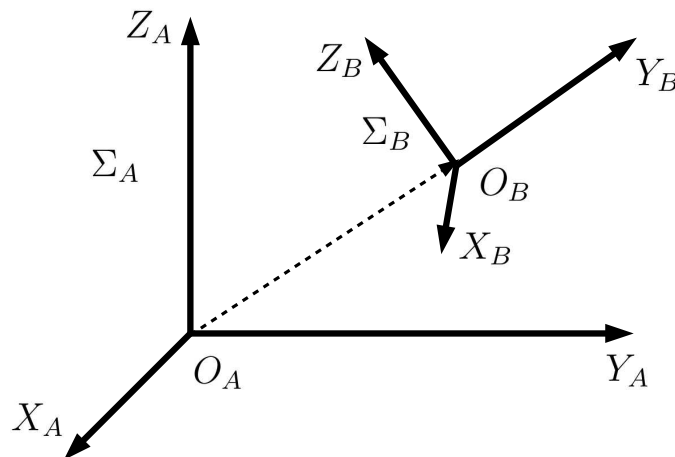


図 1.1: 基準座標系と物体座標系

これ以降の議論では O_A から O_B に向かうベクトル (O_B の位置ベクトル) を Σ_A の座標系で表示したものを ${}^A\mathbf{p}_B$ と表し, X_B, Y_B, Z_B の方向を向く単位ベクトルを Σ_A の座標系で表示したものを ${}^A\mathbf{x}_B, {}^A\mathbf{y}_B, {}^A\mathbf{z}_B$ と表す. このとき, 左上の添え字 A はベクトルが Σ_A の座標系で表示されていることを表している.

${}^A\mathbf{x}_B, {}^A\mathbf{y}_B, {}^A\mathbf{z}_B$ を使って ${}^A\mathbf{R}_B = [{}^A\mathbf{x}_B {}^A\mathbf{y}_B {}^A\mathbf{z}_B]$ としたとき, この 3×3 行列 ${}^A\mathbf{R}_B$ を回転行列 (方向余弦行列) と呼ぶ.

あるベクトル \mathbf{r} を Σ_A の座標系で表示したものを ${}^A\mathbf{r} = [{}^Ar_x, {}^Ar_y, {}^Ar_z]^T$, Σ_B の座標系で表示したものを ${}^B\mathbf{r} = [{}^Br_x, {}^Br_y, {}^Br_z]^T$ とすると,

$$\mathbf{r} = {}^Br_x {}^A\mathbf{x}_B + {}^Br_y {}^A\mathbf{y}_B + {}^Br_z {}^A\mathbf{z}_B = [{}^A\mathbf{x}_B {}^A\mathbf{y}_B {}^A\mathbf{z}_B] [{}^Br_x, {}^Br_y, {}^Br_z]^T \quad (1.1)$$

であり, ${}^A\mathbf{r} = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{r}$ の関係が成り立つ.

ベクトル空間全体を表すのに必要なベクトルの組を基底と呼び, それぞれの長さが1であり (正規化されており), 互いに直交する (内積が0である) ような基底を正規直交基底と呼ぶ. 正規直交基底の列を横に並べてできる行列を直交行列と呼ぶ. ここで示した回転行列も直交行列の一例である.

直交行列にはいくつかの重要な性質がある (数学的な証明は省略する). \mathbf{R} と \mathbf{S} を n 次の直交行列としたとき

- $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$
- \mathbf{R} の逆行列は転置行列である
すなわち $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- \mathbf{R} と \mathbf{S} の積 \mathbf{RS} も直交行列である
- \mathbf{R} の行列式は $|\mathbf{R}| = \pm 1$ である

となる. ただし, 右上の添え字「 T 」は転置行列, 「 -1 」は逆行列, 「 $||$ 」は行列式をそれぞれ表している.

1.2 角度の定義

身体の各体節を変形しない剛体として扱い，その剛体リンクを関節で連結して作成した，人体を模したモデルを剛体リンクモデルと呼ぶ。

本書では2次元上の剛体リンクモデルの関節の角度を図1.2のように定義する．角度は反時計回りを正とし，正の向きに矢印を記載している．また， $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n$ である．

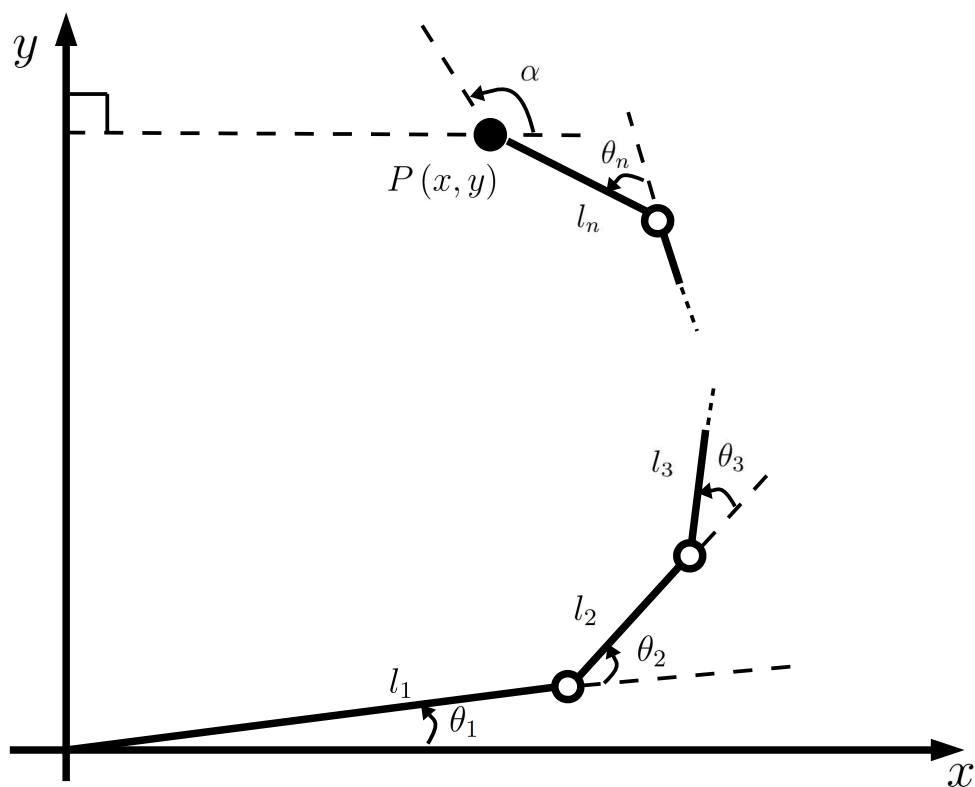


図 1.2: 2次元 n リンクモデル

3次元空間の角度には複数の定義方法が存在する．3次元の角度を数学的に扱うためにはオイラー角の定義がよく用いられる．オイラー角の定義方法は複数あるが，本書ではそのうち最もよく利用されている以下のオイラー角の定義方法を利用する．

1. 座標系 Σ_A と一致する座標系を Z_A 軸回りに ϕ 回転させた座標系を $\Sigma_{A'}$ ($O_A - X_{A'}Y_{A'}Z_{A'}$) とする
2. 次に $\Sigma_{A'}$ を $Y_{A'}$ 軸回りに角度 θ だけ回転させた座標系を $\Sigma_{A''}$ ($O_A - X_{A''}Y_{A''}Z_{A''}$) とする
3. 最後に $\Sigma_{A''}$ を $Z_{A''}$ 軸回りに角度 ψ だけ回転させた座標系を Σ_B とする

このとき，座標系 Σ_A から見た座標系 Σ_B の姿勢は3つの角度の組 (ϕ, θ, ψ) で表現することができ，この3つの組で定義された3次元上での角度をオイラー角と呼ぶ（図 1.3）．

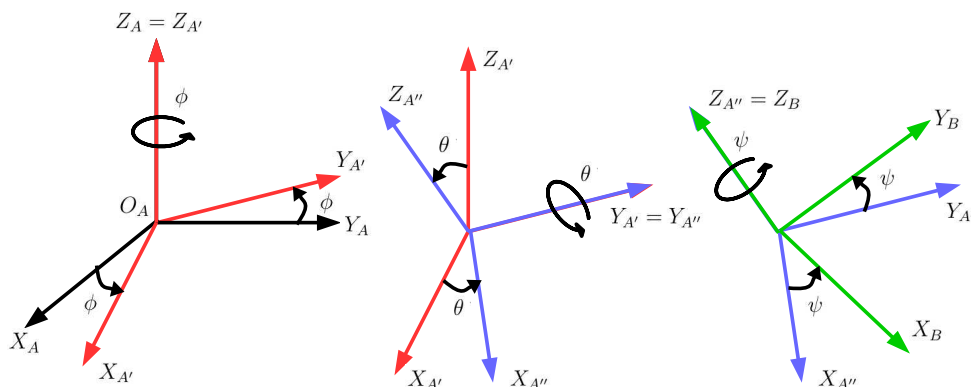


図 1.3: 3次元オイラー角 (ϕ, θ, ψ)

次にオイラー角と回転行列 ${}^A\mathbf{R}_B$ の関係について考える． $S_\alpha = \sin \alpha$ ， $C_\alpha = \cos \alpha$ と表記すると（このような略記法は計算ミス減らすために有用なので覚えておくとよい），

$${}^A\mathbf{R}_{A'} = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$${}^{A'}\mathbf{R}_{A''} = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$${}^{A''}\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

(ϕ, θ, ψ) の回転の合成である ${}^A\mathbf{R}_B$ は ${}^A\mathbf{R}_B = {}^A\mathbf{R}_{A'} {}^{A'}\mathbf{R}_{A''} {}^{A''}\mathbf{R}_B$ なので

$${}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.2 節で定義した角度は，幾何計算として数学的に扱いやすい角度の定義であり，これを本書では関節変数と呼ぶことにする．

バイオメカニクスや臨床の分野で人の関節の角度を扱う場合は，これとは異なる定義が用いられることが多い．関節角度の定義方法についてはいくつかの流派があるが，臨床歩行研究会が発行している「*DIFF* 解説書」や，藤田医科大学が発行している「歩行分析と動作分析」などを参照するとよいだろう．

1.3 ヤコビアン の 計算

以下の説明では特に説明がない場合はベクトル表記を太字とする．上肢の末端の手先位置を \mathbf{X} ，関節角度を θ としたとき，手先の速度 $\dot{\mathbf{X}}$ と関節角速度 $\dot{\theta}$ との関係を表した以下の式における \mathbf{J} をヤコビアンと呼ぶ．ヤコビアン \mathbf{J} とは関節角速度 $\dot{\theta}$ と手先の速度 $\dot{\mathbf{X}}$ の変化の比率を表す物理量となっている．

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\theta} \quad (1.6)$$

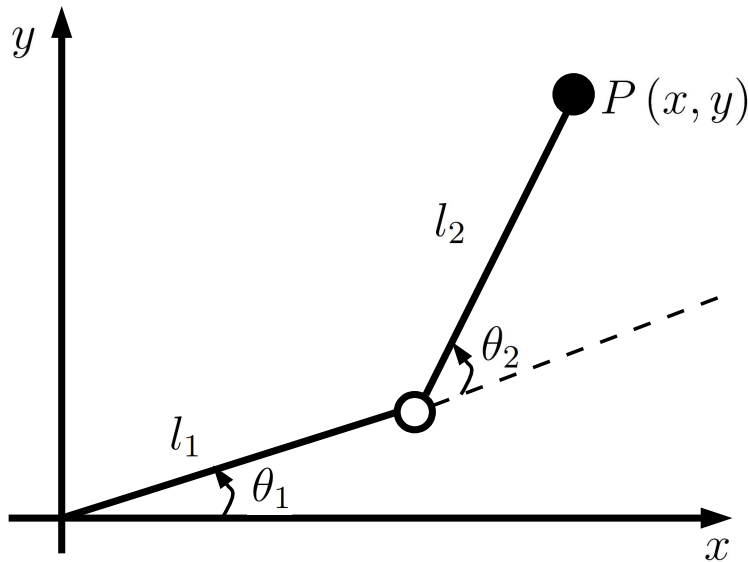


図 1.4: 2次元2リンクモデル

図 1.4 に示す 2次元の 2リンク剛体モデルのヤコビアン \mathbf{J} を計算する例を示す．手先の位置 P の位置座標を $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，全微分の定義式より

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta_2} d\theta_2 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta_2} d\theta_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

であり、これを行列表現すると

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

となる。この両辺を dt で割ると

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

となり、 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$ とすれば、関節角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{pmatrix}$ と手先の速度 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ の関係式 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$ が得られる。

実際に図 1.4 の 2次元の 2リンク剛体モデルの \mathbf{J} を計算すると

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

なので $\frac{x}{\partial \theta_1}$, $\frac{x}{\partial \theta_2}$, $\frac{y}{\partial \theta_1}$, $\frac{y}{\partial \theta_2}$ をそれぞれ計算して

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

が得られる。

1.4 剛体リンクモデルの一般化

関節の動きによって動かせる回転方向の数を「関節の自由度」と呼ぶ。例えば、肩は屈曲・伸展の方向、内転と外転の方向、内旋と外旋の方向に腕を動かせるため、関節の自由度は「3」であるし、手の末端にある指の関節は屈曲・伸展方向にしか動かさないため、関節の自由度は「1」である。

一つ一つの関節に対する関節の自由度の設定には様々な考え方があるが、例えば自動車業界でよく利用されている *RAMSIS* と呼ばれるデジタルマネキンでは図 1.5 のような関節の自由度が設定されている [3]。図中の *DOF* (*DegreeOfFreedom*) が関節の自由度を表しており、骨盤 *BEC* は原点位置の情報も持つため、自由度は「6」となっている。

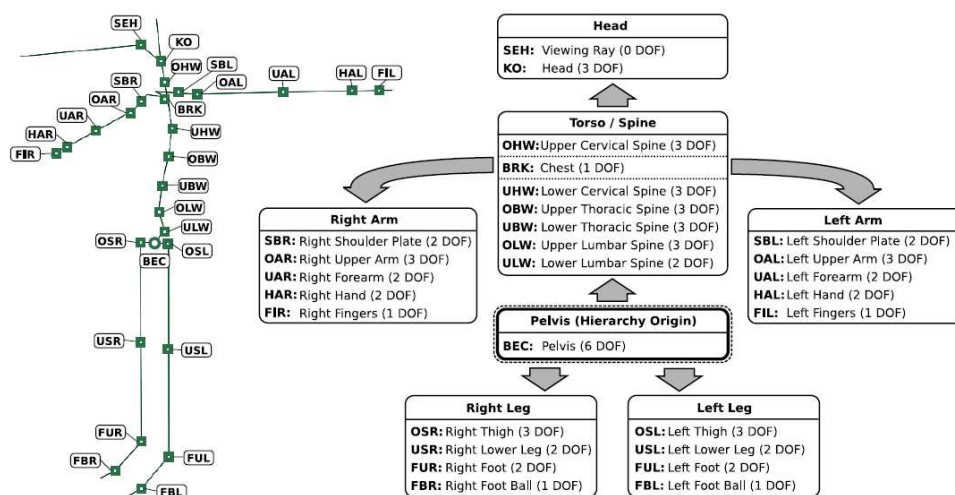


図 1.5: RAMSIS モデルの関節の自由度 [3]

図 1.5 のように人には数多くの関節が存在するので、数学的に扱いやすくするために n 自由度の多関節と手先位置の関係を一般化して定義する。ただし、関節が 1 より大きい k 自由度を持つ場合は、長さが 0 のリンクで繋がれた k 個の 1 自由度の関節で置き換えて考えるものとする。

人の関節の自由度に $1, 2, \dots, n$ と番号をつける。また、第 i 関節の角度を q_i とし、関節変数（関節角度）と呼ぶことにする。

次に関節変数をまとめた関節変数ベクトル関節変数 \mathbf{q} を

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (1.12)$$

と定義する。

また、手先の位置と姿勢（空間上の角度）を表すベクトル \mathbf{r} を

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T \quad (1.13)$$

と定義する。

このとき、3次元空間上で手先が自由な位置と姿勢が取れる場合は、手先の位置は x, y, z の 3次元座標、手先の姿勢は α, β, γ の 3つの姿勢角度で表すことができるため $m = 6$ となる。

\mathbf{r} と \mathbf{q} の関係は一般的には $\mathbf{r} = \mathbf{f}_r(\mathbf{q})$ の非線形関数となり、関節変数ベクトル \mathbf{q} が決まれば、対応する手先位置 \mathbf{r} は一意に決まる。この計算は簡単に解くことが可能であり、こうした問題は順運動学問題と呼ばれる。

逆に \mathbf{r} から \mathbf{q} を求める場合は $\mathbf{q} = \mathbf{f}_r^{-1}(\mathbf{r})$ を求めなければならないが、 \mathbf{r} に対して \mathbf{q} が必ず存在するとは限らない（例えば手先の届かない場所に \mathbf{r} を設定すると解は存在しない）。また、解が存在しても一意に決まるとは限らない（同じ手先位置でも様々な関節角度が解として存在する）。この計算は多くの場合解くことが難しく、こうした問題は逆運動学問題と呼ばれる。

1.5 ヤコビアン的一般化

ヤコビアンをもう少し一般化したヤコビ行列を定義する.

k 次元ベクトル $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k]^T$ と, l 次元ベクトル $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l]^T$ の間に $\eta_j = f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ が $j = 1, 2, \dots, l$ で成り立つとき, 以下のよう
に定義された $l \times k$ 行列をヤコビ行列と呼ぶ.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\eta(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\xi}^T} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_k} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

このとき $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}_\eta(\boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}}$ である.

ヤコビ行列を用いれば, 手先の位置と姿勢を表すベクトル \mathbf{r} の微分値 (手先速度) と, 関節変数ベクトル \mathbf{q} の微分値 (関節角速度) の関係は $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ とシンプルに記述できる. このとき $\mathbf{J}_r(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T}$ となる.

次に図 1.6 に示す 2次元 3リンクモデルのヤコビ行列の計算例を示す.

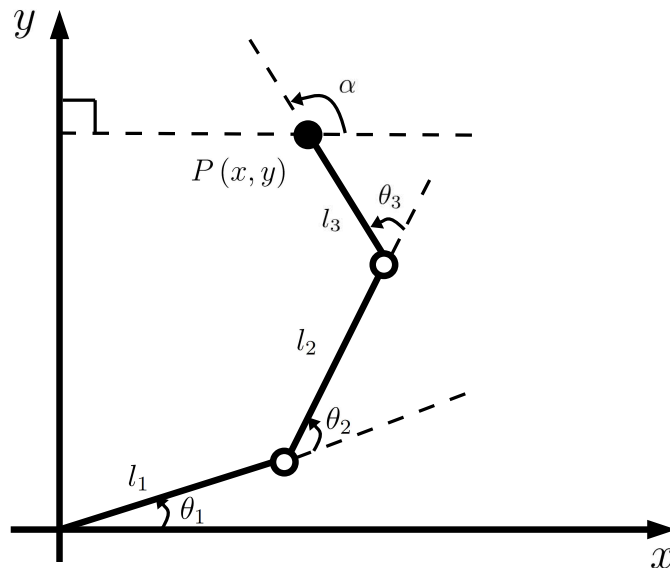


図 1.6: 2次元 3リンクモデル

ここで $\mathbf{r} = [x, y, \alpha]^T$, $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ として, $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $C_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$, $S_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} x &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ y &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \\ \alpha &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

で計算できる. このとき,

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

であることに注意して \mathbf{J}_r を計算すると

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -(l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123}) & -(l_2 S_{12} + l_3 S_{123}) & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

となり, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ の関係式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123}) & -(l_2 S_{12} + l_3 S_{123}) & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

となる.

可操作性楕円体

2.1 楕円体の概念

2次元2リンクモデルの関節角度 θ_1, θ_2 の微小変化を $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ とした場合に、 $\sqrt{(\Delta\theta_1)^2 + (\Delta\theta_2)^2} \leq 1$ の条件で $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ を変化させた場合をここでは考える。式 1.11 より

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

となる。この関係式に $\sqrt{(\Delta\theta_1)^2 + (\Delta\theta_2)^2} \leq 1$ を満たす $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ を代入して ($d\theta_1, d\theta_2$ を代入して) 計算された dx, dy を $\Delta x, \Delta y$ に置き換えて座標平面上にプロットすると楕円体が描ける (図 2.1)。

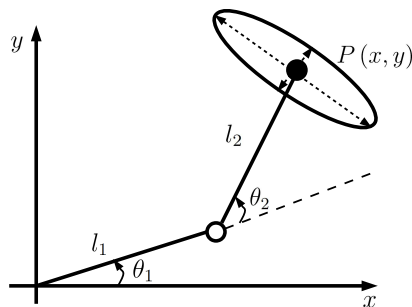


図 2.1: 楕円体モデル

このとき、楕円体は関節角度 θ_1, θ_2 をわずかに変化させた場合に、手先が動くことのできる範囲を図示したものになっている。また、楕円の長軸は手先が動かしやすい方向を、短軸は手先が動かしにくい方向を表している。

こうした楕円体は数学的に容易に計算して求めることができるため、古くからロボットアームの操作性（手先の動かしやすさ）の評価に利用されており、ロボットアームと似た関節構造を持つ人の場合でも、同様の評価指標を利用することができる。

次に楕円体の計算方法について説明するが、その前に関節角速度ベクトルを使ったヤコビ行列の計算方法について説明する。

2.2 関節角速度ベクトルを使ったヤコビ行列計算

座標の回転角速度については複数の表現方法が存在する。

オイラー角による定義

座標系の姿勢角をオイラー角で表現したベクトルを ${}^A\phi_B$ としたときの ${}^A\dot{\phi}_B = \frac{d^A\phi_B}{dt}$ を座標の回転角速度として定義する方法

角速度ベクトルによる定義

各瞬間における座標軸の回転軸方向に、回転角速度に等しい大きさを持つ角速度ベクトル ${}^A\omega_B$ を座標の回転角速度として定義する方法

ただし、左上の添え字 A は基準座標系 Σ_A 、右下の添え字 B は物体座標系 Σ_B を表し、 ${}^A\phi_B, {}^A\omega_B$ は基準座標系 Σ_A から見た物体座標系 Σ_B の値をそれぞれ表している。

1.2 節のオイラー角の定義に戻って考えると ${}^A\phi_B = [\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}]^T$ としたとき、 ${}^A\omega_B = \dot{\alpha}Z_A + \dot{\beta}Y_{A'} + \dot{\gamma}Z_{A''}$ であり、 Z_A は ${}^A\mathbf{R}_{A'}$ の第3列、 $Y_{A'}$ は ${}^A\mathbf{R}_{A''} = {}^A\mathbf{R}_{A'}{}^A\mathbf{R}_{A''}$ の第2列、 $Z_{A''}$ は ${}^A\mathbf{R}_B$ の第3列に相当するため、これらの列成分を取り出してまとめると

$${}^A\omega_B = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\beta} \begin{bmatrix} -S_\phi \\ C_\phi \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\gamma} \begin{bmatrix} C_\phi S_\theta \\ S_\phi S_\theta \\ C_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix} {}^A\dot{\phi}_B \quad (2.2)$$

となり、 ${}^A\dot{\phi}_B$ と ${}^A\omega_B$ はそれぞれ異なる値を取ることが分かる。

第1章で計算した $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ の式における座標の回転角速度の定義はオイラー角による定義を採用しており, $\mathbf{r} = [{}^A\mathbf{P}_B, {}^A\phi_B]^T$ としたときのヤコビ行列を計算している.

ここで回転角速度の定義として角速度ベクトル ${}^A\boldsymbol{\omega}_B$ を採用すると, $\mathbf{V} = [{}^A\dot{\mathbf{P}}_B, {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T$ となり, $\mathbf{V} = \mathbf{J}_V(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ という新たなヤコビ行列を定義することができる.

このとき \mathbf{J}_r と \mathbf{J}_V の関係は

$$\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & \mathbf{0} & & 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ & & & 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ & & & 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \mathbf{J}_r \quad (2.3)$$

となる.

楕円体モデルの計算では一般的に \mathbf{J}_V 表現のヤコビ行列が利用されるため, 以後の楕円体モデルの説明では \mathbf{J}_V 表現での計算方法を示す.

2.3 楕円体の導出方法

手先位置 \mathbf{r} に対する速度ベクトル \mathbf{V} と関節角速度 $\dot{\mathbf{q}}$ との関係が $\mathbf{V} = \mathbf{J}_V(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ で与えられているものとし、以後、 $\mathbf{J}_V(\mathbf{q})$ を単に \mathbf{J} と表記することにする。

このとき、ユークリッドノルム $\|\dot{\mathbf{q}}\| = (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2)^{\frac{1}{2}}$ が $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ を満たす関節速度 $\dot{\mathbf{q}}$ を用いて実現できる手先速度 \mathbf{V} の集合は m 次元ユークリッド空間内の楕円体となる。

この楕円体は

- 主軸半径の長い方向は大きな手先速度の出しやすい方向を表す
- 主軸半径の短い方向は小さな手先速度しか出せない方向を表す
- 楕円体が球形に近いほどあらゆる方向に手先を動かしやすい

ことを意味しており、こうした楕円体は手先の可操作性を表しているため「可操作性楕円体」と呼ばれる。可操作性楕円体は $+$ の記号を疑似逆行列とすると、以下の式によって与えられる（数学的な証明は省略する）。

$$\mathbf{V}^T (\mathbf{J}^+)^T \mathbf{J}^+ \mathbf{V} \leq 1 \quad (2.4)$$

また、 $R(\mathbf{J})$ を \mathbf{J} の値域とすると $\mathbf{V} \in R(\mathbf{J})$ となる。楕円体では $\mathbf{V} = \mathbf{J}_V(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ において $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ の条件を扱っているため $\mathbf{V} \in R(\mathbf{J})$ である。

疑似逆行列について補足説明をしておくと、疑似逆行列とは通常の逆行列の概念を正則でない行列の逆行列を扱えるように拡張したものである。

任意の $m \times n$ 行列 \mathbf{A} に対して以下の等式を満たす行列は疑似逆行列と呼ばれる。

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$
- $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$
- $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

疑似逆行列は $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ のとき $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ であり、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ のとき $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ である。

楕円体の性質を決める主軸ベクトルは以下の方法で求まる.

\mathbf{J} の特異値分解を $\mathbf{J} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ とすると, \mathbf{U} は $m \times m$, \mathbf{V} は $n \times n$ の直交行列であり, Σ は

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_m & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right] \quad (2.5)$$

となる.

ここで, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ であり, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ は \mathbf{J} の特異値である. つまり $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ は, $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ の固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ の平方根 $\sqrt{\lambda_i}$ の大きいほうから順に m 個取ったものになっている (特異値分解に関する数学的な証明は省略する).

このとき \mathbf{U} の第 i 列ベクトルを \mathbf{u}_i で表せば可操作性楕円体の主軸は $\sigma_1\mathbf{u}_1, \sigma_2\mathbf{u}_2, \dots, \sigma_m\mathbf{u}_m$ となる.

楕円体の主軸に関する計算方法は次のように考えると分かりやすくなる. 楕円体は $S = \{\mathbf{V} | \mathbf{V} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1\}$ となる集合 S で表現される. $\mathbf{J} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ であることから $S = \{\mathbf{V} | \mathbf{V} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{q}}, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1\}$ の場合を考えればよく, $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{q}}$ において特異値分解の解の性質から $\mathbf{U} \in R^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in R^{n \times n}$ は直交行列となる. このとき, \mathbf{V}^T は直交行列であることから座標の回転を意味し, Σ は各座標軸方向に対角成分の倍率だけ伸縮することを意味し, \mathbf{U} は直交行列であることから座標の回転を意味する.

ここで, \mathbf{T} を直交行列とすると $(\mathbf{T}\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ であり, 直交行列は内積に影響を及ぼさない. また, $\|\mathbf{T}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$ であることからノルムにも影響を及ぼさず, 直交行列の積は座標の回転を意味することに注意して欲しい.

このため, 集合 $S = \{\mathbf{V} | \mathbf{V} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{q}}, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1\}$ は $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ で与えられる単位球を \mathbf{V}^T で回転させ, Σ で各軸方向に伸縮させ, 最後に \mathbf{U} だけ回転させて得られた楕円体であることが直観的に分かる.

可操作性楕円体から計算される可操作性の目安として楕円体の体積が利用されることもある。体積が大きいほど操作性が高く、体積が小さいほど操作性は低いと言える。

楕円体の体積は $c_m \omega$ で計算され

$$\omega = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m \quad (2.6)$$

m が偶数のときは

$$c_m = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-2) \cdot m]} \quad (2.7)$$

m が奇数のときは

$$c_m = \frac{2(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-2) \cdot m]} \quad (2.8)$$

となる（数学的な証明は省略する）。

ここで、係数 c_m は m が決まれば定数となるため、実際は ω の値で楕円体の体積は変化する。このため、 ω は可操作度と呼ばれる。

ω は $\omega = \sqrt{\det \mathbf{J} \mathbf{J}^T}$ で計算することも可能であり、 $m = n$ の場合は $\omega = |\det \mathbf{J}|$ で計算できる。

2.4 特異値分解の計算方法

任意の $m \times n$ 行列 \mathbf{A} について $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ の固有値を計算すると $\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 0$ の解となる。

固有値を大きい順に並べて $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ として、 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ (ただし $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ とする) と定義すると、ある $m \times m$ の直交行列 \mathbf{U} と $n \times n$ の直交行列 \mathbf{V} が存在して、 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ が成立し、 \mathbf{U} は左特異ベクトル、 \mathbf{V} は右特異ベクトルと呼ばれる。

このとき $\mathbf{\Sigma}$ は $m \geq n$ のときは

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ \hline & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$\mathbf{\Sigma}$ は $m < n$ のときは

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_m & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right] \quad (2.10)$$

で与えられる。

\mathbf{U} と \mathbf{V} については以下の方法で計算できる。行列 \mathbf{A} について $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T$ なので、 $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^T)$ となる。

一般的に行列 \mathbf{A} の固有ベクトルを並べて作成した行列 \mathbf{X} は $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}$ と表され、 $\mathbf{\Lambda}$ は対角行列でその成分が固有値となることが知られている (数学的証明は省略する)。

結局、上式から行列 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ の固有値は行列 \mathbf{A} の特異値の2乗 ($\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^T$) であり、その単位長さの固有ベクトルを求めれば左特異ベクトル \mathbf{U} になることが分かる。同様に $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ の固有値は同じく特異値の2乗になり、その単位長さの固有ベクトルを求めれば右特異ベクトル \mathbf{V} となる。

ただし、 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 、 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ともにその固有値が特異値の2乗になること、 \mathbf{U} 、 \mathbf{V} は直交行列であるため、各列ベクトルは正規直交基底となるため互いに垂直であり、それぞれの大きさは1となるため、 \mathbf{U} 、 \mathbf{V} ともに単位長さの固有ベクトルがその列成分となることに注意すること。

2.5 可操作性楕円体の計算例

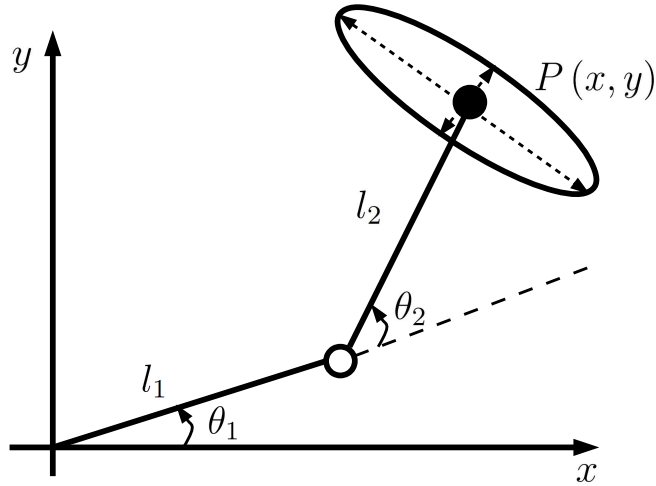


図 2.2: 2次元2リンクモデルの可操作性楕円体

図 2.2 に示した 2次元2リンクモデルの可操作性楕円体の計算例を示す.

$C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $C_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$, $S_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ の表記方法を利用すると, $x = l_1 C_1 + l_2 C_{12}$, $y = l_1 S_1 + l_2 S_{12}$ なので

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

このとき可操作度 ω は $\omega = |\det \mathbf{J}| = l_1 S_2 |S_2|$ なので $\theta_2 = \pm 90[\text{deg}]$ で可操作度はリンク長 l_1 , l_2 によらず最大値となることが分かる.

人間が机の上でマウス操作を行うときに肘の角度が $90[\text{deg}]$ 付近になっているのは, 可操作度が最大となる姿勢を取るためと考えられる.

次に可操作楕円体の主軸を計算する.

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11}^2 + j_{12}^2 & j_{11}j_{21} + j_{12}j_{22} \\ j_{21}j_{11} + j_{22}j_{12} & j_{21}^2 + j_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} a_{11} &= (-l_1 S_1 - l_2 S_{12})^2 + (-l_2 S_{12})^2 \\ a_{12} &= a_{21} = -\frac{1}{2} l_1^2 \sin(2\theta_1) - l_1 l_2 \sin(2\theta_1 + \theta_2) - l_2^2 \sin(2\theta_1 + 2\theta_2) \\ a_{22} &= (l_1 C_1 + l_2 C_{12})^2 + (l_2 C_{12})^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ の固有値 λ は $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T - \lambda\mathbf{I}) = 0$ より求める. このとき

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (2.14)$$

であり, $\alpha = -(a_{11} + a_{22})$, $\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ として $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ を考えると

$$\begin{aligned} \alpha &= -(L_1^2 + 2L_2^2 + 2L_1L_2C_2) \\ \beta &= L_1^2L_2^2S_2^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

である (数学的証明は省略するが非常に煩雑な計算が必要である). $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ の一般解 $\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$ に α , β を代入すると

$$\lambda = \frac{(L_1^2 + 2L_2^2 + 2L_1L_2C_2) \pm \sqrt{(L_1^2 + 2L_2^2 + 2L_1L_2C_2)^2 - 4L_1^2L_2^2S_2^2}}{2} \quad (2.16)$$

となり, 特異値は $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ となる (ただし, $i = 1, 2$ である).

楕円体の主軸ベクトルは $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ の単位長さの固有ベクトルを求めればよいので、 $\mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{U} = \lambda_i\mathbf{U}$ として、 $\mathbf{U} = \mathbf{u}_i = (u_x u_y)^T$ とすると、 $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{U} = 0$ であり

$$\left[\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

を解くと $u_y = \frac{(\lambda_i - j_{11})}{j_{12}} u_x$ となる。

従って $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ の単位長さの固有ベクトルを求めると

$$u_x = \frac{-j_{12}}{\sqrt{j_{12}^2 + (j_{11} - \lambda_i)^2}} \quad (2.18)$$

$$u_y = \frac{j_{11} - \lambda_i}{\sqrt{j_{12}^2 + (j_{11} - \lambda_i)^2}} \quad (2.19)$$

となる。この式に先ほど求めた $\lambda_i (i = 1, 2)$ を代入すれば、可操作楕円体の主軸ベクトル（固有ベクトル） $\mathbf{u}_i (i = 1, 2)$ を求めることができる。

2.6 数値シミュレーションによる計算

2.5節では2次元2リンクモデルの可操作性楕円体の解析解を求める例を示したが、数値シミュレーションによって可操作楕円体を計算する場合はより簡便な方法がよく利用される。

2次元 N リンクモデルの手先位置を $P(x, y)$ とすると

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^N \left(l_k \cos \left(\sum_{l=1}^k \theta_l \right) \right) \\ y &= \sum_{k=1}^N \left(l_k \sin \left(\sum_{l=1}^k \theta_l \right) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる。多変数関数の全微分の定義より

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial \theta_N} d\theta_N \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial \theta_N} d\theta_N \end{aligned} \quad (2.21)$$

であり、

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial \theta_N} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial \theta_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\theta_N}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

となるため、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial \theta_N} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial \theta_N} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

である。通常この \mathbf{J} の計算は式 (2.20) を偏微分して l_1, l_2, \dots, l_N と $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ の値を代入するだけなので簡単に数値計算できる。

次に通常のプログラミング言語であれば行列の固有ベクトルと固有値を計算する関数として $[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$ となる eig 関数が準備されているため、これを計算に利用する。

ただし、 $[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{A})$ としたとき、 \mathbf{V} の列は \mathbf{A} の固有ベクトルとなっており、対角行列 \mathbf{D} の対角成分には固有値が左上から順番に、大きい値の順にソートされて入っているものとする。

このとき、可操作性楕円体の主軸ベクトルの大きさ σ_1, σ_2 は

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sqrt{\mathbf{D}(1,1)} \\ \sigma_2 &= \sqrt{\mathbf{D}(2,2)}\end{aligned}\tag{2.24}$$

であり、可操作性楕円体の主軸ベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{V}(:,1) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{V}(:,2)\end{aligned}\tag{2.25}$$

となる（ただし、 $\mathbf{V}(:,d)$ は \mathbf{V} の d 列目の成分を表している）。

以上の方法で楕円体の主軸ベクトル \mathbf{u} とその大きさ σ が計算できるため、めんどろな解析解を計算しなくても2次元平面上に楕円体を描画することができる。

様々な楕円体

3.1 筋空間・関節空間・作業空間

人間の運動は筋肉を動かし、関節角度が変化し、手先（作業）の位置が変わる。筋肉、関節、手先（作業）の変化は物理状態で定義することが可能であり、その物理状態を表す座標空間を以下のように定義できる。

筋空間 筋長や筋力など筋の物理状態を表す座標空間

関節空間 関節角度や関節トルクなど関節の物理状態を表す座標空間

作業空間 手先の位置・姿勢や力など手先の物理状態を表す座標空間

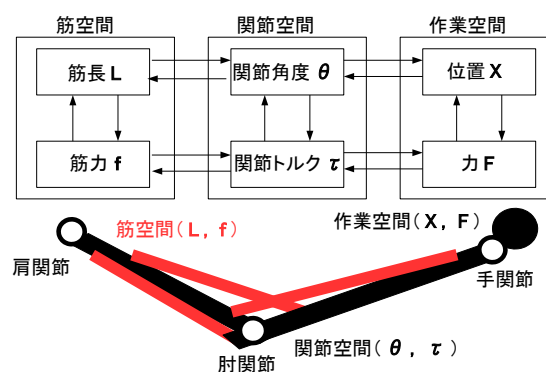


図 3.1: 各空間の定義

3.2 各座標空間の関係性

筋空間，関節空間，作業空間の間にはそれぞれの座標空間で記述された運動の変換式が存在する．例えば第1章で扱ってきたヤコビアン \mathbf{J} は関節空間の関節角度の微小変化 $d\theta$ から作業空間の位置・姿勢の微小変化 $d\mathbf{X}$ への変換式と考えることができる（図3.2）．

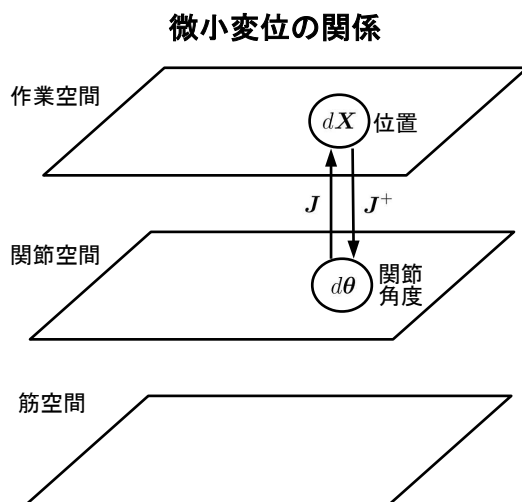


図 3.2: 各座標空間の関係性 その1

以降の項で各座標空間の関係性を定式化するために，作業空間，関節空間，筋空間で次のように座標空間上の変数（ベクトル）を定義する．

作業空間

$$\text{位置・姿勢 } \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$$

$$\text{力 } \mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$$

関節空間

$$\text{関節角度 } \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$$

$$\text{関節トルク } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$$

筋空間

$$\text{筋長 } \mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_k)^T$$

$$\text{筋力 } \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$$

どの空間で運動を行う場合でも仕事はエネルギーを単位としており，座標系に依存しない．したがって，リンク系に微小変化をさせたときにリンク系がなす仕事は，作業空間で表現しても同じでなければならない．

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}^T d\boldsymbol{\theta} \quad (3.1)$$

この式に $d\mathbf{X} = \mathbf{J}d\boldsymbol{\theta}$ を代入して整理すると $\mathbf{F}^T \mathbf{J} = \boldsymbol{\tau}^T$ となる．次に両辺の転置をとって

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (3.2)$$

の式が導かれる．この式を用いれば任意の手先力 \mathbf{F} に対して，そのときの $\boldsymbol{\tau}$ を求めることができる．この関係式を図 3.2 に書き加えたものを図 3.3 に示す．

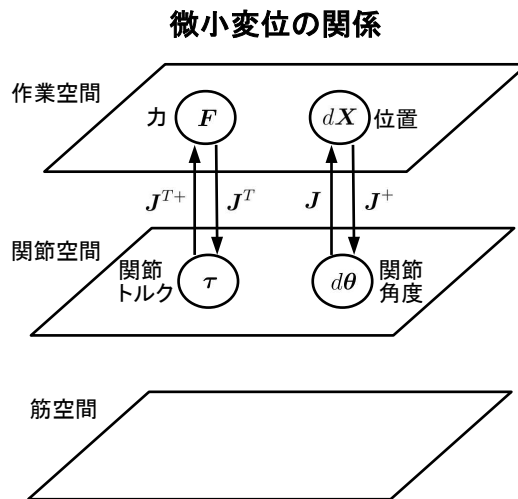


図 3.3: 各座標空間の関係性 その 2

次に筋空間と関節空間の関係の定式化を行う。筋長 L は関節角度 θ によって一意に定まるので

$$L = p(\theta) \quad (3.3)$$

となり，関節角度を筋長に変換する $k \times n$ のヤコビ行列 $G = \frac{\partial p}{\partial \theta}$ を新たに定義して θ のまわりの微小変位に着目すると

$$dL = Gd\theta \quad (3.4)$$

となる。また， $\tau = J^T F$ を求めたときと同様に考えると

$$\tau = -G^T f \quad (3.5)$$

となる（筋力と筋長は常に逆符号となるため負符号がついている）。この関係式を図 3.3 に書き加えたものを図 3.4 に示す。

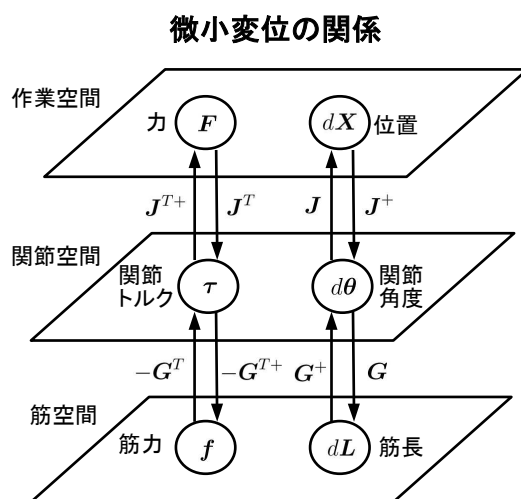


図 3.4: 各座標空間の関係性 その 3

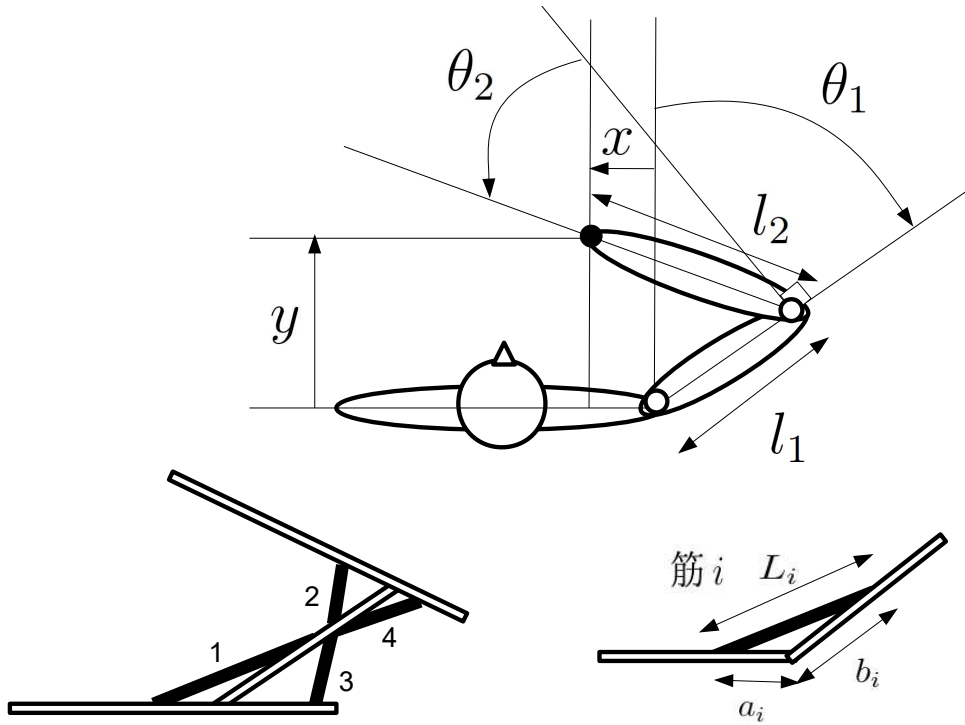


図 3.5: 筋骨格系モデルの例

例えば図 3.5 に示す筋骨格系のヤコビ行列 \mathbf{G} は例えば以下のような方法で算出できる。

まず、筋長 L を求めると余弦定理より

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(-\theta_1) \\ p_2(-\theta_2) \\ p_3(\theta_1) \\ p_4(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$p_k(\theta_i) = \left\{ a_k^2 + b_k^2 - 2a_k b_k \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta_i \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

となる。ただし $k = 1, \dots, 4$ であり、 $i = 1, 2$ である。

この L の式を θ_i で偏微分することで

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -d_1(-\theta_1) & 0 \\ 0 & -d_2(-\theta_2) \\ d_3(\theta_1) & 0 \\ 0 & d_4(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$d_k(\theta_i) = \frac{a_k b_k \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta_i\right)}{\{a_k^2 + b_k^2 - 2a_k b_k \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_i\right)\}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.9)$$

となる。

図 3.5 において、筋力 f_k で生じる関節まわりのトルク τ を求めると、筋力 f_k のモーメントアーム長は $d_k(\theta_i)$ と等しくなるので

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(-\theta_1) & 0 & -d_3(\theta_1) & 0 \\ 0 & d_2(-\theta_2) & 0 & -d_4(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{G}^T \mathbf{f} \quad (3.10)$$

となる。

このように関節空間から筋空間へのヤコビ行列 \mathbf{G} を導入することにより、筋空間と作業空間の運動学的関係を数式で記述することができる。

最後に運動が準静的であると仮定して、各空間における変位と力の関係を以下のように定義する。

作業空間 (m 次元) $F = K_e dX$ $K_e : m \times m$ 行列

関節空間 (n 次元) $\tau = K_j d\theta$ $K_j : n \times n$ 行列

筋空間 (k 次元) $f = -K_m dL$ $K_m : k \times k$ 行列

ただし dX , $d\theta$, dL はバネのように平衡点からの変位を表し、 K_m は各筋肉の弾性係数を表す行列で、筋収縮の形態によってその値は異なり、随意的に調整することも可能である。生体の運動では所望の作業空間上の K_e を、筋空間上の K_m を調整することで実現している。

この関係式を図 3.4 に書き加えたものを図 3.6 に示す。

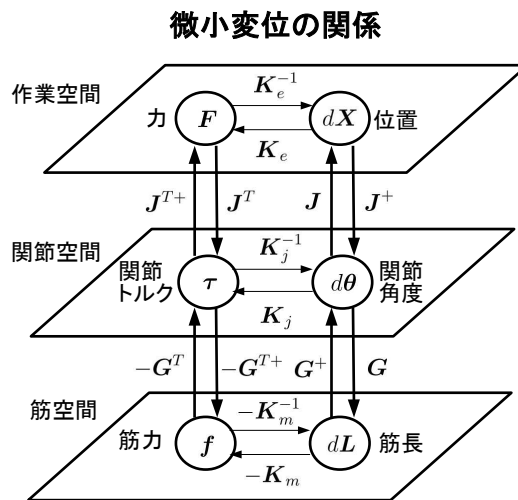


図 3.6: 各座標空間の関係性 その 4

図 3.6 より K_e と K_j の関係は $K_j d\theta = J^T K_e J d\theta$ より $K_j = J^T K_e J$ である。同じように考えると $K_j = G^T K_m G$, $K_e^{-1} = J K_j^{-1} J^T$, $-K_m^{-1} = G K_j^{-1} G^T$ の関係式が図 3.6 を見ればただちに得られる。

ここでは微小変位の関係 (F , dX , τ , $d\theta$, f , dL) について各座標空間の関係性を説明してきたが、同じような関係性の定義は速度の関係 (F , \dot{X} , τ , $\dot{\theta}$, f , \dot{L}) や加速度の関係 (F , \ddot{X} , τ , $\ddot{\theta}$, f , \ddot{L}) でも同様に定義することができる。研究では様々な空間の変位や速度、加速度の関係性が数理モデルで表現され、分析されている。

3.3 様々な楕円体モデル

人間の脳は走る、投げる、跳ぶといった身体の運動を実現するとき、作業空間、関節空間、筋空間それぞれのレベルで運動のプランニングを行い、複雑な運動を実現している。人体は自由度の高い冗長系になっており、作業空間上は全く同じ運動（外から計測すると全く同じ運動）であっても、様々な実現方法が存在する。

このため、運動のプランニング方法は実現する運動の速さや負荷の大きさ、本人の体の状態（疲労や怪我の状態）、本人の運動経験（練習量）によって人それぞれ異なっていると考えられる。

第2章で扱った可操作性楕円体は関節空間の関節角速度 $\dot{\theta}$ の関係と作業空間の速度 \dot{X} の関係 $\dot{X} = J\dot{\theta}$ において、 $\|\dot{\theta}\| \leq 1$ を満たす関節角速度 $\dot{\theta}$ で実現できる作業空間の速度 \dot{X} の集合 $\dot{X}^T (J^+)^T J^+ \dot{X} \leq 1$ を求めたものであり、これは関節空間の角速度 $\dot{\theta}$ から作業空間の速度 \dot{X} への運動マッピングの性質を表している。

人間の脳は各個人の身体特徴に応じた各空間間のマッピングの性質を記憶しており、特異姿勢回避、関節トルク総和最小、運動エネルギー最小、関節可動域制約などの拘束条件下で運動の不良設定問題の解を瞬時に計算することで運動のプランニングを行っていると考えられている。

運動のマッピングについては可操作性楕円体以外にも様々な楕円体モデルが提案されている。

可操作性楕円体

$$\text{基本式 } \dot{X} = J\dot{\theta}$$

$$\text{正規化条件 } \|\dot{\theta}\| \leq 1$$

$$\text{楕円体集合 } \dot{X}^T (J^+)^T J^+ \dot{X} \leq 1$$

可操作力楕円体

$$\text{基本式 } \tau = J^T F$$

$$\text{正規化条件 } \|\tau\| \leq 1$$

$$\text{楕円体集合 } F^T J J^T F \leq 1$$

筋力コンプライアンス楕円体

$$\text{基本式 } dX = -JK_j^{-1}G^T f$$

$$\text{正規化条件 } \|f\| = 1$$

$$\text{楕円体集合 } dX^T [(JK_j^{-1}G^T)(JK_j^{-1}G^T)^T]^{-1} dX \leq 1$$

$$\text{ただし } \text{rank}J = m, \text{rank}G = n$$

他にも τ と $\ddot{\mathbf{X}}$ との関係を表す動的可操作性楕円体, \mathbf{F} と $\ddot{\mathbf{X}}$ の関係を表す一般化慣性楕円体とモビリティ楕円体, $d\mathbf{X}$ と \mathbf{F} の関係を表す等ポテンシャル楕円体とスティフネス楕円体など, 様々な楕円体モデルが提案されている.

このうち可操作力楕円体は関節トルクをわずかに変化させた場合に手先で発揮できる力を表しており, 楕円体の長軸は力の出しやすい方向, 短軸は力の出しにくい方向を表している.

既に説明した通り \mathbf{J} の特異値分解を $\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ として, \mathbf{J} の特異値を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ としたとき, 可操作性楕円体の主軸ベクトルは $\sigma_1 \mathbf{u}_1, \sigma_2 \mathbf{u}_2, \dots, \sigma_m \mathbf{u}_m$ となる.

可操作力楕円体の主軸を計算すれば $\frac{\mathbf{u}_1}{\sigma_1}, \frac{\mathbf{u}_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\mathbf{u}_m}{\sigma_m}$ となるため (数学的証明は省略する), 可操作性楕円体と可操作力楕円体は任意の2軸を選んで楕円体を比較すると, 必ず長軸と短軸が直交する関係になっている.

これは手先を動かしやすい方向は手先の力の出しにくい方向になっており, 手先の力の出しやすい方向は手先を動かしにくい方向になっていることを意味しており, 人間の感覚によく一致することが分かる.

例えば上下方向は手先を動かしやすく, 前後方向は手先を動かしにくいいため, プロテインのシェイクは手を上下方向に動かして行う. 逆に前後方向は手先の力が出しやすいが, 上下方向には手先の力を出しにくいいため, 手先を前後に動かすベンチプレスでは大きな力が出せるが, 手先を上下に動かすケーブルトレーニングでは大きな力が出せない.

楕円体モデルの計算

4.1 2次元2リンクモデルの楕円体

図1.4の2次元2リンクモデルにおいて、 $l_1 = l_2 = 1$ （単位は m ）として、 $\theta_2 = -2\theta_1$ の条件で θ_1 を $-\frac{\pi}{2}$ から 0 まで動かしたときの可操作性楕円体と可操作力楕円体の計算結果を図4.1に示す。

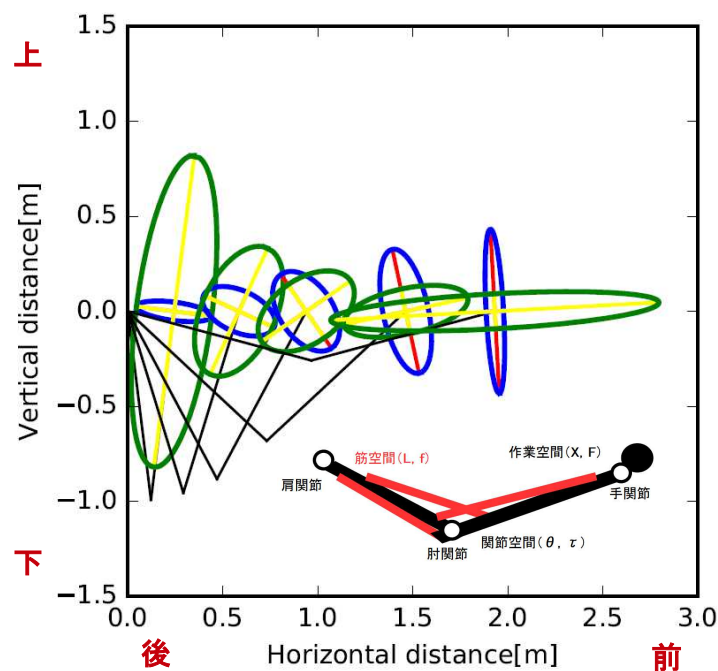


図 4.1: 楕円体モデルの計算例

なお、図 4.1 では楕円体の長軸・短軸のスケールは $\frac{1}{5}$ になっており、腕のリンクは黒色の線、可操作性楕円体を青色で長軸・短軸を赤色で描いている。また、可操作力楕円体を緑色で長軸・短軸を黄色で描いている。

図 4.1 より可操作性楕円体（青）と可操作力楕円体（緑）の長軸方向は常に直交していることが分かる。

可操作性楕円体（青）を見ると、手先を肩関節に近い位置では上下方向よりも前後方向のほうが手先が動かしやすい方向になっており、楕円体の面積は小さくなっている（手先が動かしにくくなっている）。

また、手先が肩関節から遠い位置では前後方向よりも上下方向のほうが手先を動かしやすい方向になっており、楕円体の面積も大きくなっている（手先が動かしやすくなっている）。

可操作力楕円体（緑）を見ると、手先を肩関節に近い位置では前後方向よりも上下方向のほうが手先の力が出しやすい方向になっており、手先が肩関節から遠い位置では上下方向よりも前後方向のほうが手先の力が出しやすい方向になっている。

人の感覚とは多少のズレがあるものの、人の動作感覚に近い計算結果が得られるいることが分かる。

4.2 2次元3リンクモデルの楕円体

次に図1.6の2次元3リンクモデルを使ってスクワットの動作をシミュレーションした結果を図4.2に示す。図4.2では l_1 は下腿部、 l_2 は大腿部、 l_3 は体幹部の長さを表すものとする。また、図は矢状面での運動を扱っており（体を真横から見たときの運動を扱っており）、足関節位置を原点としている。原点に近いほうからリンクから l_1 、 l_2 、 l_3 となっている。図4.2には可操作力楕円体のみを緑色で描いており、膝の屈曲角度が大きい姿勢ほど楕円の緑色が濃くなるように描いている。図4.2では楕円体の長軸・短軸のスケールは $\frac{1}{20}$ になっている。

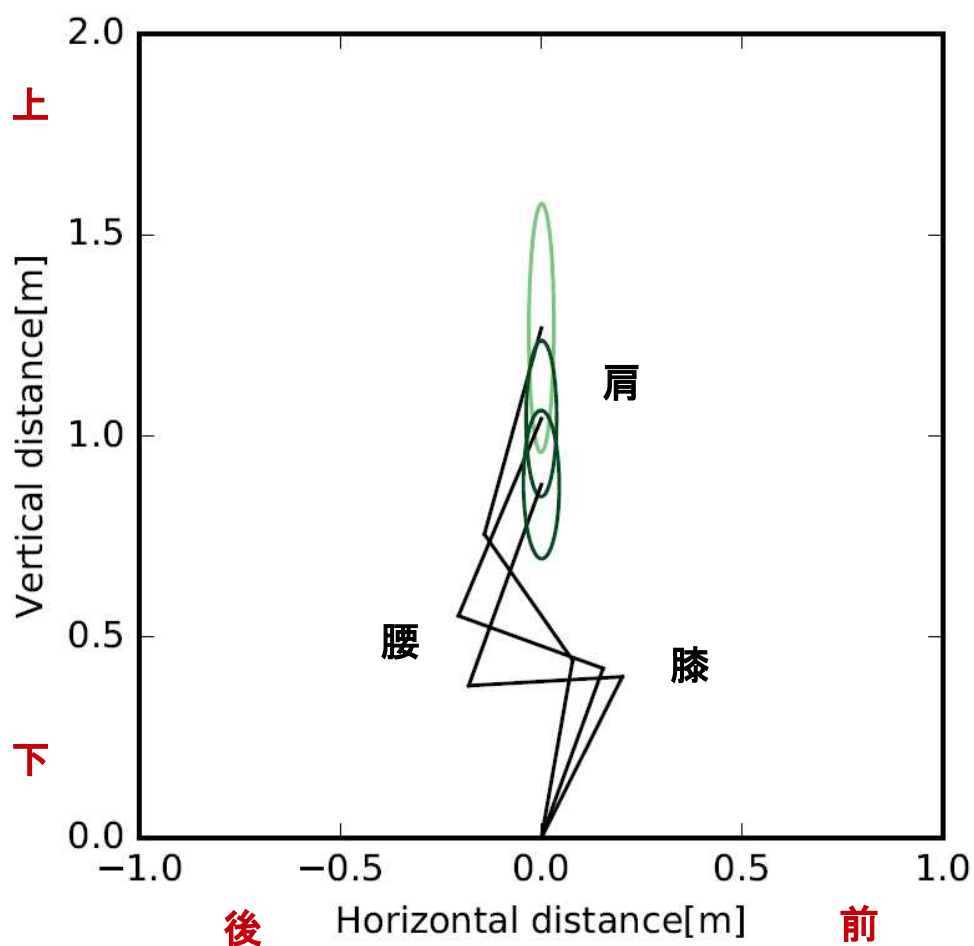


図 4.2: 楕円体モデルの計算例 2

l_1, l_2, l_3 の長さについては 2003 年に産業技術総合研究所のデジタルヒューマン研究センターで計測された *AIST/HQL* 人体寸法・形状データベース 2003 の 20 歳から 30 歳の日本人男性 49 名のデータを用いて以下のように定めた。

l_1 膝蓋骨中央高の平均値 (0.449m)

l_2 転子外突高の平均値 (0.832m) から l_1 を引いた値 (0.383m)

l_3 肩峰高の平均値 (1.364m) から転子外突高の平均値を引いた値 (0.532m)

スクワットの姿勢についてはクォータースクワットのときの膝関節角度を $\theta_2 = 45deg$, ハーフスクワットのときの膝関節角度を $\theta_2 = 90deg$, フルスクワットのときの膝関節角度を $\theta_2 = 120deg$ とした (フルスクワットは股関節位置が膝関節位置よりわずかに低くなる, キリの良い角度に設定した)。

なお, 足関節角度は $\theta_2 = 0deg$ のときに $\theta_1 = 90deg$, $\theta_2 = 90deg$ のときに $\theta_1 = 70deg$ となるように $\theta_1 = 90 - \frac{2\theta_2}{9}$ で変化するものと想定し, 股関節角度は足関節と肩関節を結ぶ線が必ず地面と垂直になるように (バーベルが垂直方向にのみ動くように)

$$\theta_3 = \cos^{-1} \left\{ -\frac{l_1}{l_3} \cos \theta_1 - \frac{l_2}{l_3} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right\} - \theta_1 - \theta_2 \quad (4.1)$$

で変化するものと想定して計算を行った。

スクワットで高重量を扱うためには, バーベルをかついだ位置 (肩関節の位置) で, バーベルを持ち上げる方向である, 垂直方向上向きの可操作力楕円体成分 (以下, 挙上力成分と呼ぶ) が大きくなるのが好ましい。

図 4.2 より, 挙上力成分は θ_2 が大きくなるほど (スクワットの姿勢がクォータースクワットからフルスクワットに近づいていくほど) 小さくなっていく様子が分かる。

これはスクワットの姿勢がクォータースクワットからフルスクワットに近づいていくほど, バーベルを持ち上げる方向に力が出しにくくなるという計算結果を示しており, 人の動作感覚に近い計算結果が得られていることが分かる。

この傾向をもう少し詳しく調べるために θ_2 と 挙上力成分（楕円の中心と楕円と、 y 軸との接点のうち値が大きいほうの接点との距離に等しい値となる）の関係を計算した結果を図 4.3 に示す。

ただし、図 4.3 の横軸は膝関節角度 θ_2 を表しており、縦軸はフルスクワットするとき（膝関節角度を $\theta_2 = 120deg$ のとき）の挙上力成分の大きさが 1 になるようにスケーリングされた挙上力成分の値の大きさを示している。

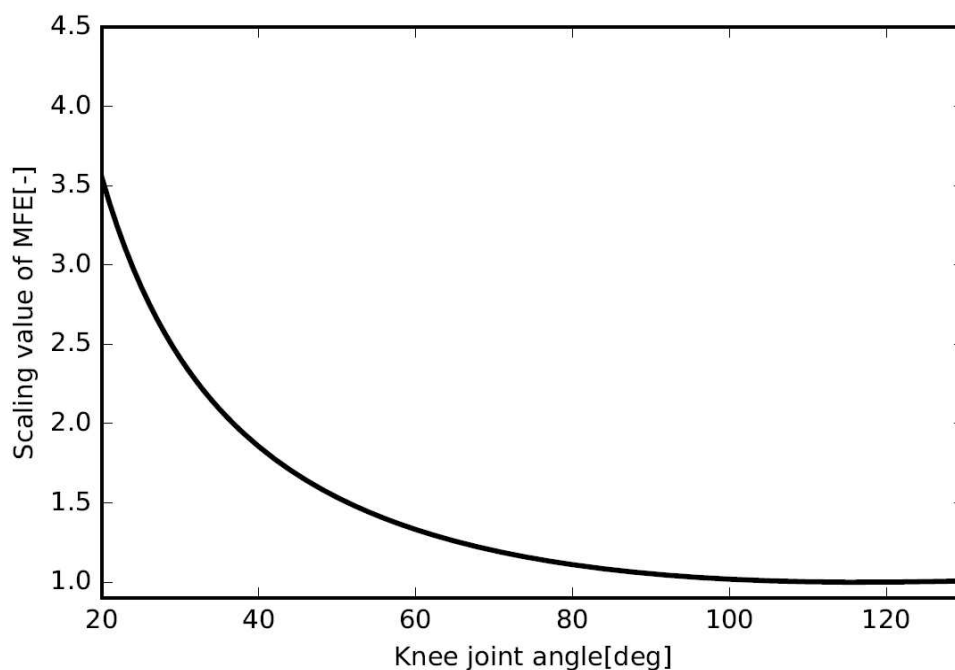


図 4.3: 計算結果のグラフ 1

図 4.3 ではフルスクワット ($\theta_2 = 120deg$) の値 1.00 に対して、ハーフスクワット ($\theta_2 = 90deg$) では 1.05、クォータースクワット ($\theta_2 = 45deg$) では 1.68 の値となっている。

また、同じグラフの極小点付近を拡大して描いた図4.4を見ると、フルスクワット手前のパラレルスクワット（大腿部と地面が平行となる深さまでしゃがんだスクワット）付近で挙上力成分は極小値を取っていることが分かる。

競技者の間ではフルスクワットよりもパラレルスクワット付近の姿勢のほうが挙上する力を出しにくいことは経験的によく知られており、スクワットのスティッキングポイント（可動域の中で最も発揮できる力が弱いポイント）の姿勢と計算結果がよく一致していることが分かる（物理的にはパラレルスクワットの姿勢がバーベルと膝関節、股関節間のモーメントアームが最も長くなる姿勢となるため、挙上力成分が極小値を取っていると考えられる）。

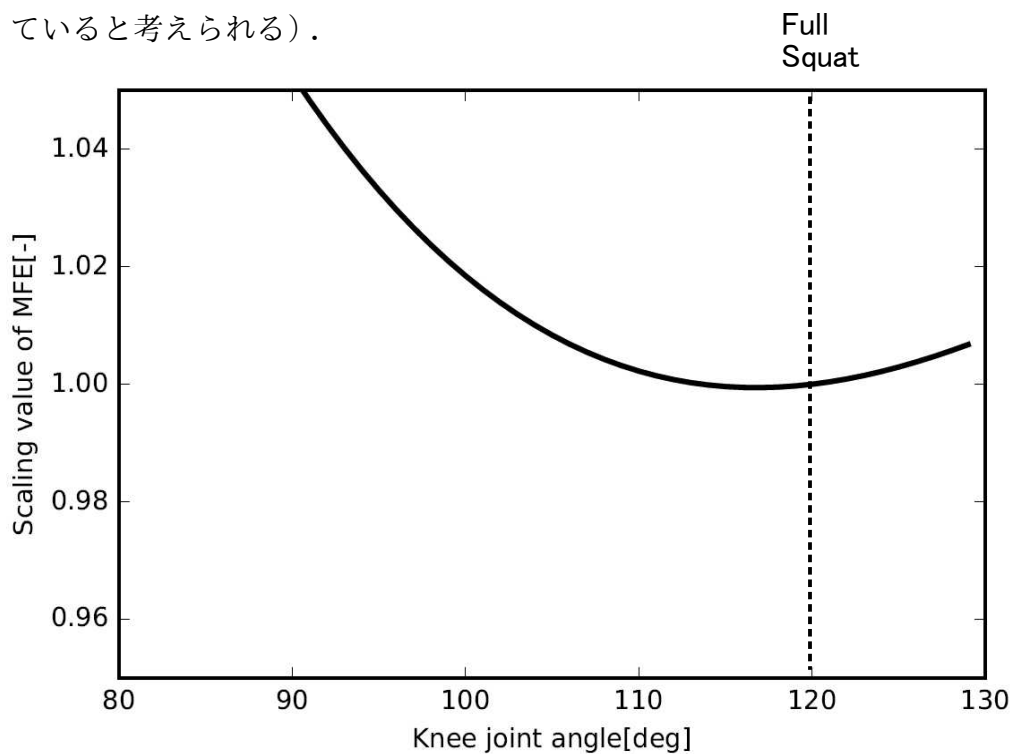


図 4.4: 計算結果のグラフ 2

最後に実際の人で計測したフルスクワット、ハーフスクワット、クォータースクワットの最大挙上重量の実測値が、どの程度計算結果と一致するか比較する。

少なくとも2年以上のトレーニングを行い、少なくとも体重の1.5倍以上の平行スクワットが可能であり、高強度のトレーニングが可能な28名の男子大学生アスリートを集めて、各スクワットの最大挙上重量を計測した実験 [4] によると、各スクワットの最大挙上重量の平均値はおおむね

フルスクワット 平均値 127kg

ハーフスクワット 平均値 150kg (フルスクワットの1.18倍)

クォータースクワット 平均値 165kg (フルスクワットの1.30倍)

の計測結果であった。

また、この実験ではスクワットをしたときの膝関節角度をゴニオメータで計測しており、フルスクワットは110deg以上、ハーフスクワットは85degから95degの間、クォータースクワットは55degから65degの間に膝の角度がなるように計測を行っている。

先ほどの2次元3リンクモデルを使って、この実験に合わせて可操作力楕円体の挙上力成分を再計算した結果は

フルスクワット 挙上力成分 0.185 ($\theta_2 = 110deg$ で計算)

ハーフスクワット 挙上力成分 0.194 ($\theta_2 = 90deg$ で計算)
フルスクワットの1.05倍

クォータースクワット 挙上力成分 0.246 ($\theta_2 = 60deg$ で計算)
フルスクワットの1.33倍

であり、ハーフスクワットの計算値がやや低めに出ているものの、概ね良い計算結果を得ていることが分かる。

最後に理論値と計測値をプロットしたグラフを図 4.5 に示す。

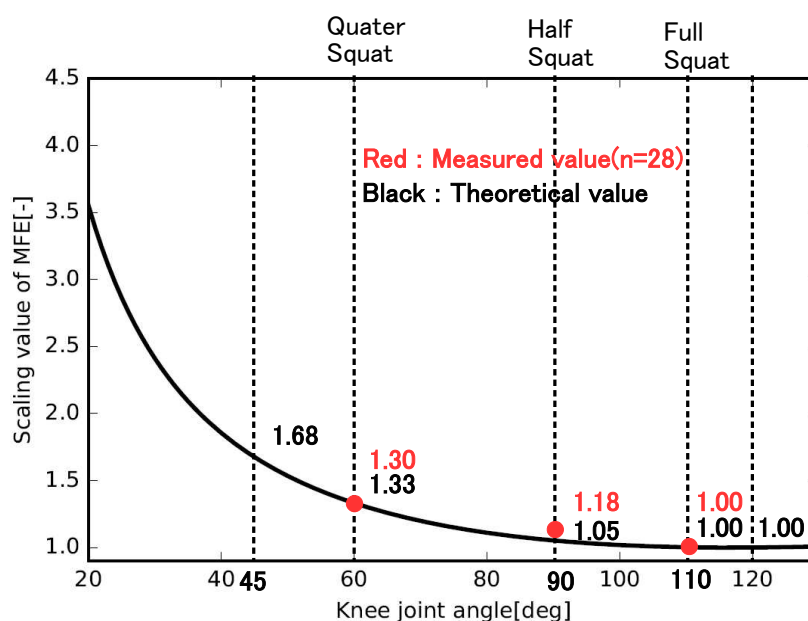


図 4.5: 計算結果のグラフ 3

このように楕円体モデルのような単純な幾何モデルであっても、分析対象の動作によっては、細かい条件は一致しないものの大雑把な動作の傾向は分析することができる。

ただ、ここで用いた可操作力楕円体は人の体では当然とも言える

- 人は関節角度によって筋力の出しやすさが違う
- 人は関節によって発揮できる筋力が違う（膝関節よりは股関節のほうが大きなトルクが出せる）
- 人は動作の速度によって発揮できる筋力の大きさが違う（ヒルの法則）

といった前提を無視した計算結果になっている。このため、ハーフスクワット付近の理論値と計測値の誤差が大きいと考えられる。

より人間の感覚に近い、より実験での計測値に近い結果を得るためには、より精緻な数理モデルを使った分析が必要であることが分かる。

後書き

人の運動を数理モデルを使って分析することが難しいのと同様に，人（とその運動）を正しく計測することも難しい．例えば，第4章で利用した人体寸法の計測の一つを取ってみても，その計測には多くのノウハウや背景知識が必要である．

例えば「下腿の長さを測る」ことを考えてみたときに，下腿の長さとはどこからどこまでの長さのことだろうか？という疑問が浮かぶ．次に「足関節中心から膝関節中心までの長さのこと」と定義したとして，では足関節中心と膝関節中心の位置はどのように測るのか？という疑問に当たる．

少し調べてみると膝関節点とは直立時に大腿骨遠位部で最大前後径の高さを上下方向の値として，その高さにおける大腿骨の左右径の中心を左右方向の値として，前後径の中心を進行方向の値とする点とすればよい近似位置を得ることや，足関節点は前額面で見たと内顆と外顆の突起点を結ぶ線分の midpoint とすればよい近似位置を得ることなどが分かる．

最後にこれを多数の人を対象に計測して統計データを作成しようと思いついたときに，それをやろうと思うと途方もない労力と時間が必要となることに思いが至り，計測を諦めることだろう（もしくは適当な計測で代用することを考えるだろう．参考までに代用的な簡易計測法についても一大研究分野が存在している）．

幸いにもこうしたデータの多くは計測結果がデータベースとして公開されており，我々エンジニアはそれほど苦労することなく計算に使いたいデータを入手することができる．

こうした基礎研究を突き詰め，地道に計測実績を積み重ねる研究者には本当に頭が下がる思いである．その努力が一つ一つの工業製品のレベルを上げ，多くの人々の「使いやすい」とか「ちょうど良い」に繋がっているのである．

関連図書

- [1] 吉川恒夫. ロボット制御基礎論. コロナ社, 1988.
- [2] 伊藤正美伊藤 宏司. 生体とロボットにおける運動制御. コロナ社, 1991.
- [3] M.Magnor H.P.Seidel C.Theobalt, J.Carranza. Enhancing silhouette-based human motion capture with 3d motion fields. *Proc. of Pacific Graphics*, pp. 185–193, 2003.
- [4] M.Peterson D.Massey R.Simao P.Marin et al M.Rhea, J.Kenn. Joint-angle specific strength adaptations influence improvements in power in highly trained athletes. *Human Movement*, pp. 43–49, 2016.

索引

あ		極小値	47
位置	33	挙上力成分	45
一般化慣性楕円体	40	筋空間	32
運動のプランニング	39	筋長	33
運動の不良設定問題	39	筋力	33
エネルギー	34	筋力コンプライアンス楕円体	39
オイラー角	12, 21	クォータースクワット	45
か		屈曲	16
外旋	16	グローバル座標系	9
外転	16	ケーブルトレーニング	40
回転行列	10	剛体リンクモデル	11, 16
角速度ベクトル	21	ゴニオメータ	48
可操作性楕円体	23, 27, 39	固有値	24
可操作度	25	固有ベクトル	26
可操作力楕円体	39, 40	さ	
下腿部	43	作業空間	32
関節角速度	14	仕事	34
関節角度	13, 14, 33	矢状面	43
関節空間	32	姿勢	33
関節トルク	33	姿勢角度	17
関節の自由度	16	自由度	16
関節変数	13, 17	主軸半径	23
関節変数ベクトル	17	主軸ベクトル	24
疑似逆行列	23	順運動学問題	17
基準座標系	9	人体寸法	45
基底	10	伸展	16
逆運動学問題	17	スクワット	45
逆行列	10, 23	スティフネス楕円体	40
行列式	10	正規直交基底	10

正則	23	左特異ベクトル	26
絶対座標系	9	ヒルの法則	49
全微分	14, 30	物体座標系	9
た			
対角行列	31	フルスクワット	45
体幹部	43	平衡点	38
大腿部	43	ベンチプレス	40
楕円体	20	偏微分	37
楕円体の体積	25	方向余弦行列	10
単位球	24	ボデイ座標系	9
単位ベクトル	10	ま	
短軸	40	右特異ベクトル	26
弾性係数	38	モーメントアーム	47
値域	23	モーメントアーム長	37
力	33	モビリティ楕円体	40
長軸	40	や	
直交行列	10	ヤコビアン	14
手先位置	14	ヤコビ行列	18
手先の速度	14	ユークリッド空間	23
デジタルマネキン	16	ユークリッドノルム	23
転置行列	10	余弦定理	36
動的可操作性楕円体	40	ら	
等ポテンシャル楕円体	40	ローカル座標系	9
特異値	24	わ	
特異値分解	24, 26	ワールド座標系	9
トルク	37		
な			
内積	24		
内旋	16		
内転	16		
ノルム	24		
は			
ハーフスクワット	45		
パラレルスクワット	47		

■著者略歴

真鍋 周平 (まなべ しゅうへい) 1982年8月31日生まれ

【競技歴】

1993年度 143cm

1994年度 150cm

1995年度 165cm

1996年度 176cm

1997年度 204cm 全日中3位 ジュニアオリンピックク1位

1998年度 210cm ジュニアオリンピックク1位

1999年度 215cm 世界ユース5位 全国高校総体2位 国体1位

2000年度 220cm 全国高校総体1位

2001年度 214cm

2002年度 223cm 日本選手権5位 日本学生種目別選手権1位

2003年度 225cm 水戸国際5位 スーパー陸上2位 関西学生記録

2004年度 218cm アジア室内3位 日本選手権7位

2005年度 202cm

2006年度 210cm 日本選手権7位

2007年度 215cm 全日本実業団2位

2008年度 205cm

2009年度 195cm

2010年度 205cm 全日本実業団8位

2011年度 201cm

2012年度 205cm

2013年度 201cm

2014年度 200cm

2015年度 195cm

2016年度 197cm

2017年度 190cm

2018年度 190cm

2019年度 190cm

2020年度 180cm

2021年度 182cm