

## 力学的な基礎知識

第2章では高跳びの基礎技術を理解する上で必要になる根本的な運動の原理、物理の力学的な基礎知識について解説する。学問に興味のない読者であっても各項目のポイント（四角で囲ってある言葉）となる内容だけでも読んで、その本質を理解してほしいと思う。

合理的に物事を考えることは大切なことだ。著者である私は大学で物理学を専攻し学んだ身であるので、物理や数学という学問の持つ合理性や普遍性といった「魅力」や「威力」をよく理解している。

世の中に存在する万物の運動が満たす普遍的な法則を理解することは、人間の運動の真理を知ることである。真理を楽しむ、真理を喜び、真理に安住し、真理の定めを知ることが、アスリートに限らず多くの人間にとって有意義なことだ。

一方で物理や数学によって説明できるのは、人間の動作の大雑把な原理や基本的なものに限定される。陸上競技というシンプルで、最も基本的で、究極的な運動を扱う場合に限っても、その運動はあまりに複雑で、非線形性が強く、解析的に扱うことはほとんど不可能である。ここでも、動作の細部まで説明するようなことはしない。

## 2.1 物体に作用する力と運動法則

助走し、踏み切り、マットに着地するまでに人間に働く力は3種類である。

### 1. 重力

地上の物体に作用する力。

例えばアスリートが地球から引っ張られる力。

### 2. 身体と接触したものから受ける反力

接触した物体から受ける力。

作用・反作用の法則でいうところの反作用の力。

例えばアスリートが地面から受ける力。

### 3. 慣性力（遠心力）

加速する物体（座標系）に発生するみかけ上の力。

例えばアスリートが曲線助走で受ける遠心力。

力学の基本法則や原理の説明は既に多くの教科書や参考書で説明されているのでここでは詳しく説明しない。

スポーツの動作を力学的に考える場合に考えなければならない力は「重力」「接触したものから受ける反力」「慣性力」の3種類でよい。「たった」3種類しかないことをよく理解してほしい。走る場合も投げる場合も跳ぶ場合も、この3種類の力以外は考えなくてよい。

「重力」とは質量（重さ）を持つ物体に等しくかかり，その質量に比例して受ける力である．地球の中心方向に引っ張られる力で重たいものほど大きい．

「接触したのから受ける反力」とは高跳びの場合は助走中の地面と足の接触や，バーとの接触，空気抵抗によって発生する反力があげられる．議論を簡単にするために空気抵抗は多くの場合は無視して考える．

馴染みのない力といえば「慣性力」だろう．慣性力は加速運動をしている物体に発生する力である．身近な例でいえば電車が発車するとき床を後ろに転がる空き缶に作用する力である．電車が前方に発車すると電車の中にいる人（電車とともに前方に加速する座標系）から見て床の空き缶は後方に転がる（後方に加速する）．これが慣性力である．「遠心力」とはこの慣性力の一種である．

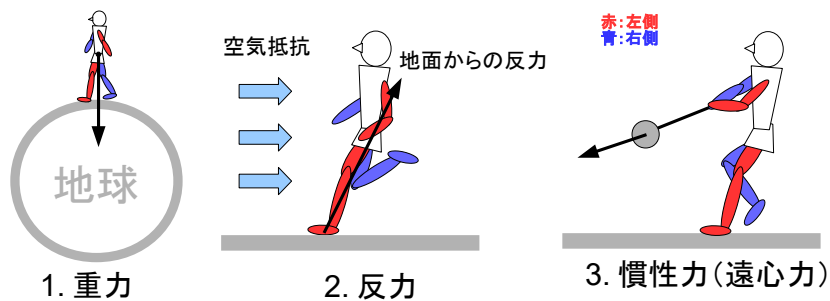


図 2.1: 物体に作用する力

物体に力が作用すると、加速度が生まれて、物体は力が作用した方向に運動を始める。こうした物体の運動の基本法則はニュートンの運動法則と呼ばれる。力学に興味のない読者も知っておいてほしい。

1. 慣性の法則（第一法則）

静止している質点は力を加えられない限り静止を続ける。  
 運動している質点は力を加えられない限り等速直線運動を続ける。

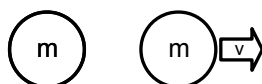


図 2.2: 第一法則

2. 運動方程式（第二法則）

物体が力を受けるとその力の働く方向に加速度が生じる。加速度は力の大きさに比例し質量に反比例する。

物体に加わる力を  $F$ 、物体の質量を  $m$ 、加速度を  $a$  とすると、以下の式に表わす関係があり、これを運動方程式という。

$$F = ma \tag{2.1}$$

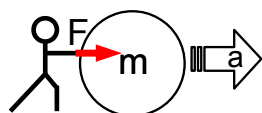


図 2.3: 第二法則

3. 作用・反作用の法則（第三法則）

二つの質点の一方が他方に作用するとき、一方が受ける力と他方が受ける力は、向きが反対で大きさが等しい。また、その力の向きは質点同士を結ぶ直線上にある。

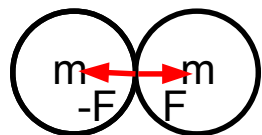


図 2.4: 第三法則

## 2.2 重心

- 重心とは自分の体重の中心点である
- 重心とは物体を一点で支えたときにちょうど釣り合う点の位置である
- 重心とは各質点の位置に質量の重みをつけて平均した位置である

重心という言葉の意味（定義）の理解できない読者は、自分の体重の中心点であるという感覚でとらえて文章を読んでほしい。

重心位置は、その選手の身体特性、主に身長や腕の長さ、脚の長さ、どの部分の筋肉が特徴的に発達しているかなどによって選手個人個人で異なる。

均質な材料でできた真っ直ぐの棒であればその重心は丁度棒の中央にある。また、体の体勢によっては（例えばクリアランス中など）必ずしも重心が体の内部にあるとは限らない。静止立位の状態の成人男性の平均的な重心位置の高さは床面から凡そ 56% の位置にあるといわれている [28]。

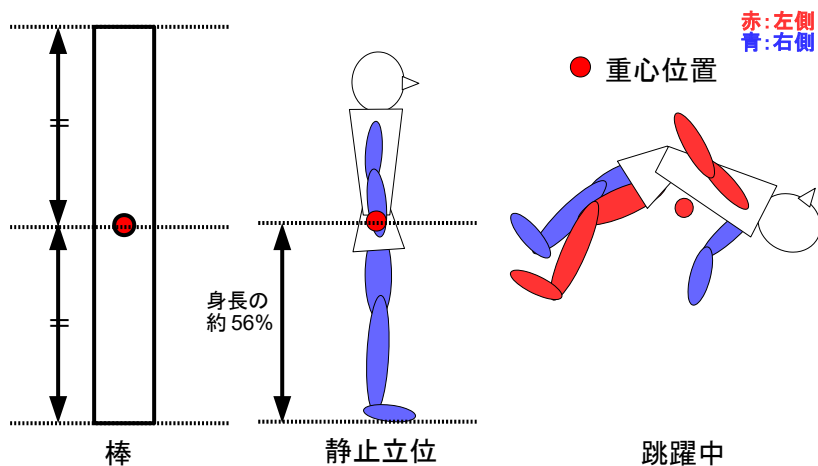


図 2.5: 重心位置のイメージ

まずは「重心」そのものの定義について説明する。重心の位置は各質点の位置に質量の重みをつけて平均化するととめることができる。これはちょうど物体を一点で支えたときにバランスの取れるつり合い位置になる。

具体的に数式で表せば、扱う対象の各質点の質量をそれぞれ  $m_1, m_2, \dots, m_N$  とし、その位置ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  とすると重心位置  $\mathbf{R}$  は

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (2.2)$$

となる。ただし質点の質量の合計を  $M$  としている。

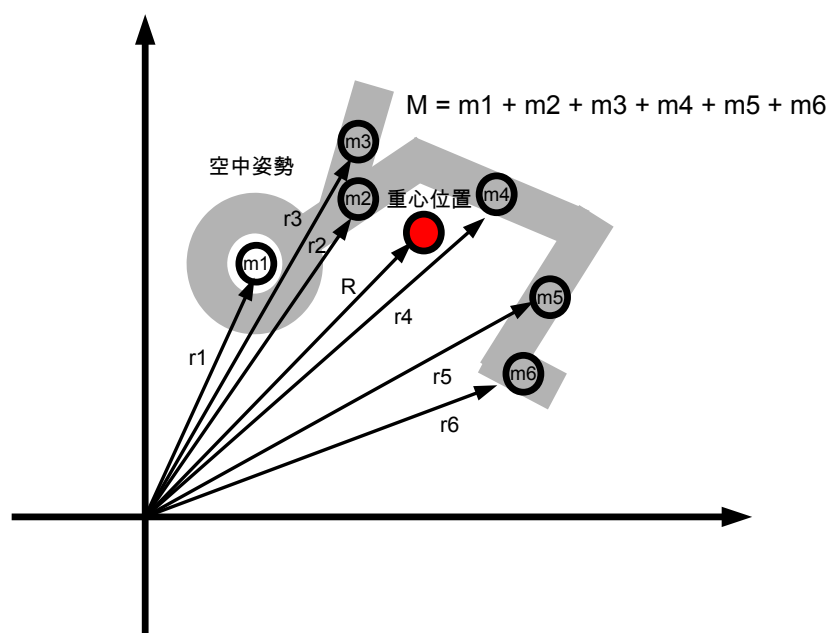


図 2.6: 重心位置の計算

一般的に人間の重心運動を分析する場合には体をいくつかのセグメント（体のパーツ）に分けて、各セグメントの位置と重量から体全体の重心位置を計算することが多い。こうした体のセグメントごとの重量や重心位置は、死体を直接解剖して分析する方法や、生体を放射線やMRIを使って関節的に分析する手法、写真撮影から数学的な手法で分析する方法などを用いて多くの科学者によって分析されている。

参考まで各体のパーツの重量と重心位置について阿江等が調査したデータを図2.7、図2.8で紹介する[29][30]。ここで質量中心とは重心のことであり、質量中心比は各体のパーツの部分長に対する中枢端（上端）からの比である。足の質量中心比はつま先からの比で表している。

参考までに図2.8中の回転半径 $k_{xj}$ とは各セグメントの質量中心を通る3軸（図中のXYZ軸）中のX軸周りの主慣性モーメントを算出し、セグメントjの重量を $M_j$ 、主慣性モーメントを $I_{xj}$ であったときの $k_{xj} = (I_{xj}/M_j)^{1/2}$ を表す量である（グラフ中の「回転半径比」とはセグメントの部分長に対する比である）。各セグメントの主な慣性モーメントは、過去の調査結果から部分密度を設定した楕円板の有限個集合による近似で計算されている。

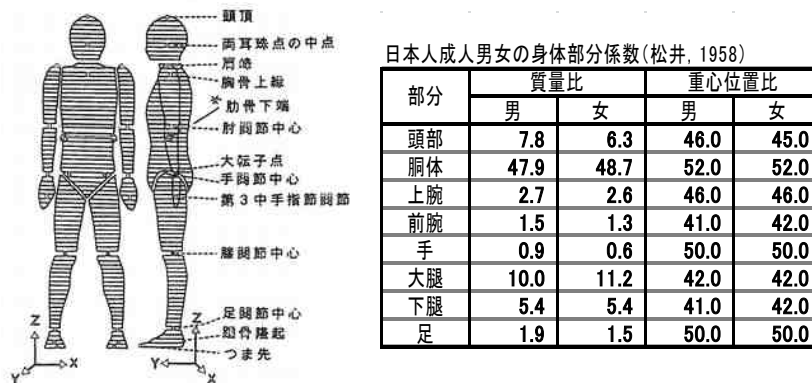


図 2.7: 身体部分係数 その1 [29]

日本人アスリートの身体部分係数

部分	男子					女子				
	質量比[%]	質量 中心比[%]	回転半径比			質量比[%]	質量 中心比[%]	回転半径比		
			kx[%]	ky[%]	kz[%]			kx[%]	ky[%]	kz[%]
頭部	※6.9 (0.7)	※82.1 (4.1)	※47.9 (2.2)	※45.4 (2.1)	※36.3 (1.9)	7.5 (0.9)	75.9 (5.2)	45.1 (2.8)	42.6 (2.4)	35.0 (2.5)
胴体	※48.9 (2.2)	※49.3a (1.6)	※34.6 (0.8)	35.7 (0.8)	※16.7 (0.9)	45.7 (2.5)	50.6a (1.8)	34.3 (0.9)	35.5 (0.9)	17.0 (0.8)
上腕	※2.7 (0.3)	52.9 (1.8)	※26.2 (0.7)	※25.7 (0.7)	10.7 (1.0)	2.6 (0.2)	52.3 (1.7)	26.5 (0.9)	26.0 (0.9)	10.7 (0.9)
前腕	※1.6 (0.2)	※41.5 (2.0)	27.9 (1.1)	27.7 (1.0)	※11.5 (1.2)	1.5 (0.1)	42.3 (2.2)	27.7 (1.1)	27.5 (1.0)	12.2 (1.2)
手	0.6 (0.1)	89.1 (10.8)	51.9 (6.4)	57.1 (7.0)	31.4 (4.5)	0.6 (0.1)	90.8 (10.2)	52.7 (5.9)	57.3 (6.6)	30.3 (4.6)
大腿	※11.0 (0.8)	※47.5 (1.8)	※27.8 (0.9)	※27.0 (0.9)	※15.2 (0.9)	12.3 (0.9)	45.8 (2.4)	28.5 (1.2)	27.8 (1.1)	15.7 (1.5)
下腿	※5.1 (0.4)	40.6 (1.5)	27.4 (0.9)	27.1 (0.9)	※9.7 (0.6)	5.3 (0.4)	41.0 (1.5)	27.5 (1.0)	27.2 (0.9)	10.2 (0.7)
足	1.1 (0.2)	59.5b (2.6)	17.7 (3.0)	8.8 (1.3)	18.2 (3.1)	1.1 (0.2)	59.4b (2.4)	18.4 (2.6)	9.0 (1.3)	18.9 (2.7)
上腕	※30.2 (1.8)	※42.8c (2.0)	35.0 (1.2)	38.1 (1.5)	※26.6 (1.8)	26.7 (1.8)	43.8c (1.9)	34.9 (1.1)	38.0 (1.4)	27.3 (1.9)
下腕	18.7 (1.5)	60.9d (3.0)	※42.5 (2.7)	47.3 (3.0)	43.5 (3.8)	19.0 (1.8)	59.7d (4.5)	41.1 (2.8)	47.1 (3.1)	44.0 (3.7)

- 1) カッコ内の数値は標準偏差を表す。※印は男女間の有意差(1%)を示す。
- 2) 部分質量は身体質量に対する比。質量中心比は部分長に対する中枢端からの比である。
- 3) aは胸骨上縁から、bは足先から、cは胸骨縁から肋骨下端の中点、dは肋骨下端の中点から大転子の中点までを示す。
- 4) 回転半径比は部分長に対する比である。

図 2.8: 身体部分係数 その 2[30]



## 2.3 クリアランス中の重心運動

- 空中では重心は放物線を描く
- 重心の最高到達点は踏み切り動作が完了した瞬間に決まる
- 重心の放物線軌道は踏み切り動作が完了した瞬間に決まる
- クリアランス動作で重心の放物線軌道が変化することはない

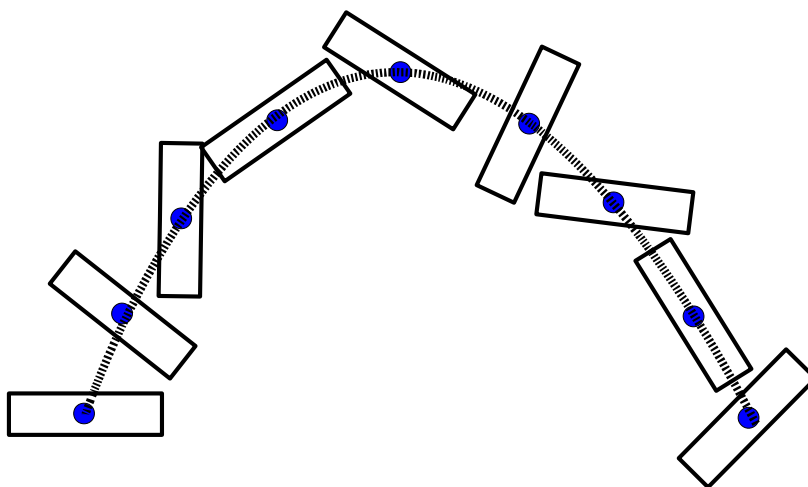


図 2.9: 重心の軌道

図 2.9 は均質な材料でできた真っすぐな棒を空中に投げた時の棒とその重心の軌跡を表している。図 2.9 のように空中に投げ出された物体の重心の軌跡は、物体の形状やその回転運動に関係なく放物線を描く性質を持っている。

こうした物理的事実を「感覚的に」理解しておくことは非常に重要である。高跳び選手の踏み切り後の重心軌道は、空気抵抗を無視すれば、クリアランス動作で変化することはない。

踏み切り動作さえ完了してしまえば、重心は空中である決まった放物線軌道しか描かないのである。つまり、踏み切り動作で空中の重心の軌道や高さを決めてしまうため、クリアランスでいくら努力しても空中の重心が高く持ち上がることはない。



図 2.10: クリアランス中の重心は常に放物線

ここでは重心の放物線運動について簡単に説明する [31].

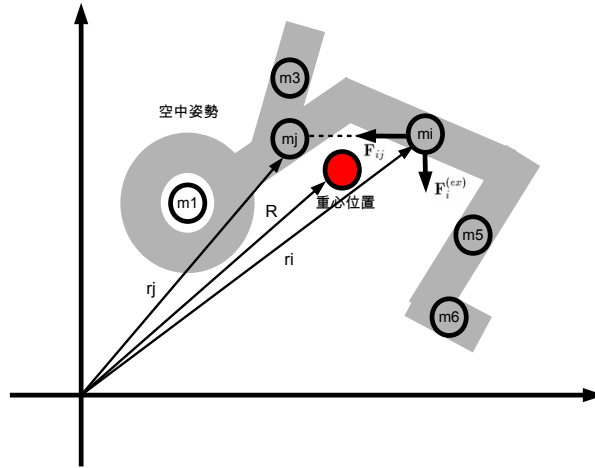


図 2.11: クリアランス中に働く力

$\mathbf{F}_{ij}$  を  $j$  番目の質点が  $i$  番目の質点に及ぼす力、つまり内力として定義し  $\mathbf{F}_i^{(ex)}$  を系の外から  $i$  番目の質点に働く力外力として定義すると重心の説明で定義した  $N$  質点系の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j(\neq i)}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(ex)} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

となる。次に上式の両辺を  $i$  について和をとると、左辺は

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \quad (2.4)$$

となる。 $\mathbf{p} = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$  は  $i$  番目の質点の運動量を表す。ここで式の右辺は作用・反作用の法則  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  を用いると

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(ex)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ex} \quad (2.5)$$

となり、全運動量を  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$  と全外力  $\mathbf{F}^{(ex)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ex}$  を定義すると

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ex)} \quad (2.6)$$

の式が導かれる。これは物体の全運動量の変化に内力が寄与しないことを示している。

次に重心の位置ベクトル  $\mathbf{R}$  を用いて式を変形すると物体の全運動量は

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (2.7)$$

となり、最終的に

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(ex)} \quad (2.8)$$

となる。この式には内力の項が存在せず、「重心の運動は、全質量と外力が重心に集まった1質点の運動に帰着し、内力は影響しない」ということを表している。

これは高跳び選手にとって「重要な」事実である。例えば空中動作を考える場合、内力とは筋肉によって姿勢をかえる力、外力は重力ということになる。この場合、筋肉の力によっていかに空中姿勢を変更したとしても、空中での重心の軌道は変化しないということを表している。

そればかりか、空中で身体に働く外力は重力のみであるため、重心は図 2.12 に示すように踏み切り直後の水平方向と鉛直方向の初速度によって空中での放物線軌道が決まることを表している。

つまり、踏み切り動作が完了した（地面から足が離れた）瞬間に重心の空中での放物線軌道は決まっていまい、クリアランス動作をどのように行ってもその放物線軌道は変化しないことを意味している。

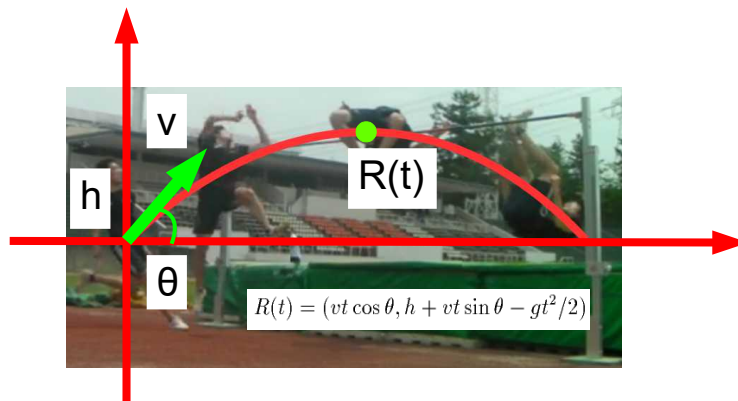


図 2.12: クリアランス中の重心の放物線運動

このとき時刻  $t$  の重心位置を  $\mathbf{R}(t)$ 、重心が空中に跳び出す速さを  $v$ 、角度を  $\theta$ 、高さを  $h$ 、重力加速度を  $g$  とすると  $\mathbf{R}(t)$  は以下の式で表される。

$$\mathbf{R}(t) = (vt \cos \theta, h + vt \sin \theta - gt^2/2) \quad (2.9)$$

重心位置の式が2次式であることから分かるように、「空中で二度体が浮く」としばしば表現される跳躍は物理的には起こり得ないことが分かる。踏み切り動作が終わった時点で重心の空中軌道は2次式の放物線軌道に決まる。

ただし、空中で重心運動は放物線を描くが運動の内力によってその空中姿勢は変化させることが可能であるため「みかけ上」空中で二度体が浮いているように見える跳躍を行うことはできる。



図 2.13: 空中で二度浮くように見える跳躍 [32]

図 2.13 は *Arthur Partyka* が 237 の跳躍に成功した跳躍の連続写真である。

*Arthur Partyka* 選手は写真 1 の鋭い後傾・内傾姿勢からしっかりしたブロック動作を行い、写真 2 ではほぼ垂直に伸びきった姿勢で踏み切り動作を完了している。そこからクリアランスに移るまで垂直な上昇姿勢をなるべく維持しながら上昇し、写真 3 から一気に頭を下げて腰を浮かせるようなクリアランスに繋げている。

こうした「上昇する姿勢→クリアランス」のメリハリが大きい跳躍は、腰が二段階で持ち上がることから空中で二度浮いているように見える。こうした跳躍はある程度レベルの高い選手になれば行うことができる。

高跳びにおいてクリアランス動作のイメージトレーニングをすることは非常に有用な方法である。しかし、頭で思い描いた空中の動きが物理的に存在するのか、理にかなっているのかは常に考えておいた方が良い。物理的に正しいイメージを作ることで、現実と想像のギャップが少なくなり、より具体的に現実的なクリアランスを頭の中でイメージできるようになる。

## 2.4 回転を生み出す力

- 「力のモーメント」の作用によって回転力は生み出される
- 同じ重さでも回転中心から離れた場所に重量が分布しているほど回転しにくい
- 同じ重さでも回転中心の近くに重量が分布していると回転しやすい

ここでは、物体が回転する運動について考えてみる。物体の重心から外れた点に力を加えると、物体は回転する。

物体を回転させる力の作用は「力のモーメント」と呼ばれ以下のように定義される。(注：工学の世界ではこの「モーメント」のことを「トルク」と呼ぶことがあるが、両者は同じものを意味する)

$$M = Fh \quad (2.10)$$

ここで  $M$  は力のモーメントの大きさを表し、 $F$  は力の大きさを表す。また  $h$  は回転中心から力の作用線（力の方向を表す線）までの距離（モーメントアーム）を表す。

この式の表わす意味は単純明快である。例えば公園にあるシーソーを回転させることを考えてみる分かりやすい。経験的に中心から離れた位置であればあるほど、かける力が強ければ強いほど、シーソーを回転させる力は大きくなる。

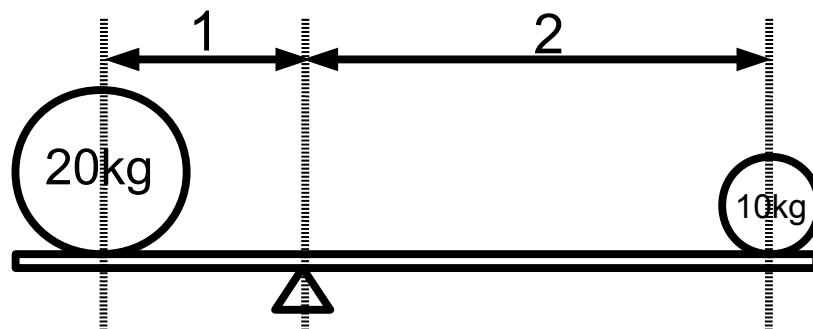


図 2.14: 回転作用の釣り合ったシーソー

運動方程式と同様に，物体の回転についても回転の運動方程式が存在している．物体に作用する力のモーメントを  $M$ ，物体の回転のしやすさをあらわす慣性モーメントを  $I$ ，回転運動の角加速度を  $\beta$  とすると以下のように定式化される．

$$M = I\beta \quad (2.11)$$

ここで，慣性モーメントとは物体の質量分布によって決まる値である．例えば，質量が同じであっても重心から遠い位置に多くの質量が分布している物体は回転しにくい．このとき，慣性モーメントは大きな値を取る．

例えば円盤投げで利用される円盤は，高額なものになると円盤のフチの部分に重量が集中した設計がなされている．こうした円盤は慣性モーメントが高く，力強いリリースに対して安定した回転飛行をする．

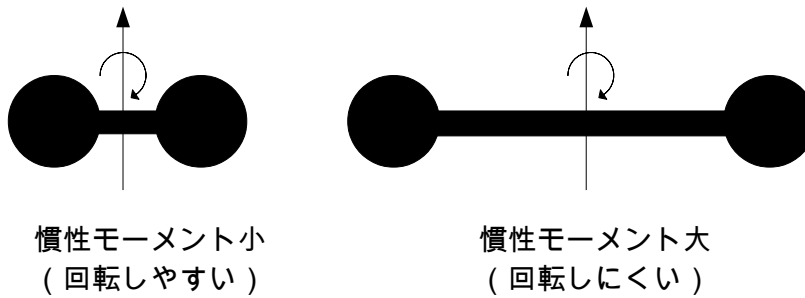


図 2.15: 慣性モーメントの大小のイメージ

## 2.5 クリアランス中の回転運動

- 物体の回転の勢い表す物理量を角運動量と呼ぶ
- クリアランスに必要な回転の角運動量は踏み切り動作によって生まれる
- 空中にいる間は重心回りの角運動量は常に保存される
- 空中で姿勢を変えることで身体の一部を速く回転したり遅く回転したりできる

ここでは物体の回転運動を考えるときの「回転の勢い」について考えてみる。重たいものほど、回転半径の大きいものほど、回転の速度（角速度）が大きいものほど、「回転の勢い」が大きいことを我々は経験的に知っている。こうした物体の回転の勢いを表す量は「角運動量」と呼ばれ、以下のように定義される（式中の「 $\times$ 」はベクトル同士の外積を表している）。

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.12)$$

ここで  $\mathbf{L}$  は物体の角運動量を表し、 $\mathbf{r}$  は物体の位置を表す。また、 $\mathbf{p}$  は物体の運動量（質量と速度の積）を表す。

この式の表す、「角運動量」という物理量は、自転車の車輪の回転を想像すれば理解しやすい。自転車の車輪を空転させ、それを手で止めようとした場合、車輪が重たいほど、車輪の半径が大きいほど、回転速度が速いほど、車輪を手で止めるために必要な力は大きくなる。

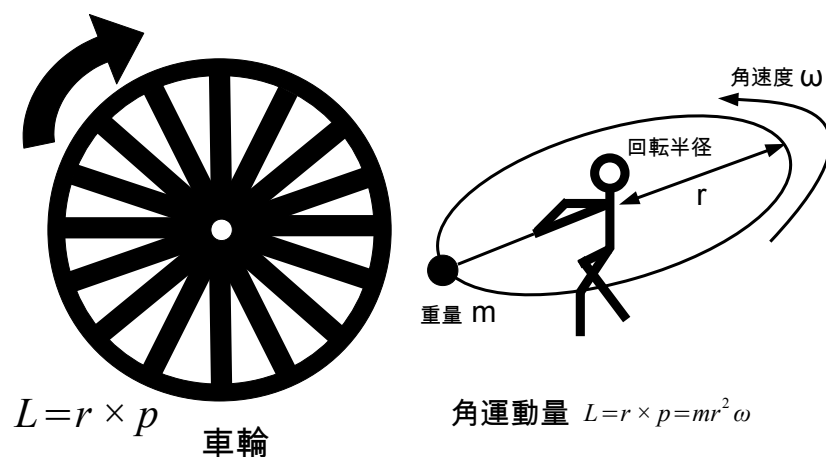


図 2.16: 角運動量のイメージ



角運動量の時間微分を計算すると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.13)$$

となるが  $d\mathbf{r}/dt$  と  $\mathbf{p}$  が平行で外積が 0 になることと、運動方程式  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  を用いると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.14)$$

となる。ここで右辺に表れた  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  はこれまで述べてきた「力のモーメント」である。すなわちこの式は角運動量の時間変化が力のモーメントの大きさによって決まっている関係を示している。モーメントが大きくなれば角運動量の増加も大きくなり（回転が強くなり）、モーメントが小さくなれば角運動量の増加も小さくなる（回転が弱くなる）。また、角運動量とは力のモーメントによる回転の効果を時間的に積算したものであるともいえる。

では高跳びにおいて踏み切り前後で体の角運動量がどのように変化するかについて考えてみよう [31]。重心の議論と同様に  $N$  個の質点からなる系を考える。 $i$  番目の質点の質量を  $m_i$ 、位置を  $\mathbf{r}_i$ 、運動量を  $\mathbf{p}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$  とする。 $j$  番目の質点が  $i$  番目の質点に及ぼす力（内力）を  $\mathbf{F}_{ij}^{(in)}$  とおく。質点  $i$  に外部から加えられた力（外力）を  $\mathbf{F}_i^{(ex)}$  とする。

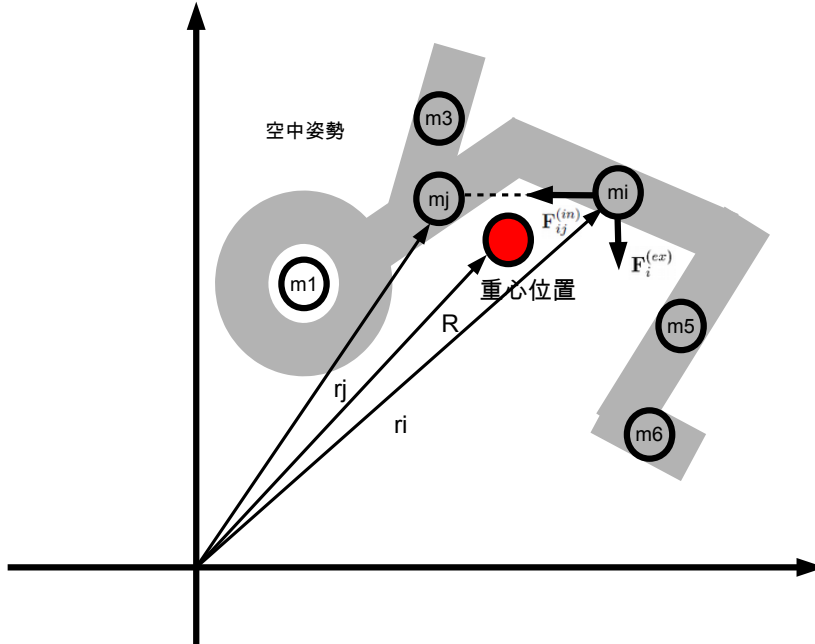


図 2.17: クリアランス中に働く力

$N$  質点系の各質点の角運動量  $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  に対して質点系の全角運動量  $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  を考える。まず、各質点の角運動量の時間変化は

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \quad (2.15)$$

となる。ここで  $i$  番目の質点が従う運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{(ex)} + \sum_{j(\neq i)}^N \mathbf{F}_{ij}^{(in)} \quad (2.16)$$

となるので

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(ex)} + \sum_{j(\neq i)}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(in)} \quad (2.17)$$

が得られる。次に全て質点に関して和を取ると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(ex)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(in)} \quad (2.18)$$

ここで内力の影響が見られる項に注目すると、この和の中には以下の項が一對ずつある。

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(in)} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{(in)} \quad (2.19)$$

この式は作用反作用の法則より  $\mathbf{F}_{ji}^{(in)} = -\mathbf{F}_{ij}^{(in)}$  なので

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(in)} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{(in)} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}^{(in)} \quad (2.20)$$

となる。

ここで作用反作用の法則より  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  の位置ベクトルと  $\mathbf{F}_{ij}^{(in)}$  の力ベクトルは平行になっているため右辺の外積は 0 になる。従って  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(in)} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{(in)} = 0$  となり、内力の効果は全て打ち消され最終的に式は以下ようになる。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(ex)}) \quad (2.21)$$

この式には内力の項が存在せず、「質点系における角運動量は外力のモーメントによって変化し、内力は無関係である」ということを表している。

人間の体を質点系として考えて、内力が角運動量に与える影響を高跳び選手の場合に置き換えて考えてみれば、空中にいる間に人間の筋肉の収縮によって発生する力（内力）は人体の角運動量の変化とは無関係になる。つまり、一度地面から体が離れてしまえば、空中でどのように姿勢を変化させても、どのように筋肉に力を入れても内力によって角運動量が増えることはない。

人間が空中にいる場合に作用する外力は空気抵抗を除けば「重力」のみである。次にこの重力が角運動量に及ぼす影響について考えてみる。人間の体を質点系として考えると各質点に働く重力は  $m_i \mathbf{g}$  である。また、重心を基準にした外力（重力）の全モーメント  $\mathbf{N}_G^{(ex)}$  を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_G^{(ex)} &= \sum_{i=1}^N \{(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i \mathbf{g}\} \\ &= \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \right) \times \mathbf{g} \\ &= \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i - M \mathbf{R} \right) \times \mathbf{g} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。ただし、 $M$  は質点系の全質量であり、 $\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}$  は重心の位置ベクトルを表している。この式から空中における重心まわりの重力のモーメントは、重心を原点として計算すれば0になることが分かる。これは「人間の体が地面から離れれば、重心回りの角運動量（内部角運動量）は重力によって変化しない」ということを表している。

以上の考察より、クリアランス動作中は内力（筋力）によっても外力（重力）によっても、重心回りの角運動量は変化しないことが分かる。つまり「体が地面から離れるとクリアランスに必要なとなる重心回りの角運動量（回転の勢い）は変化しない」という重要な結論が導き出される。

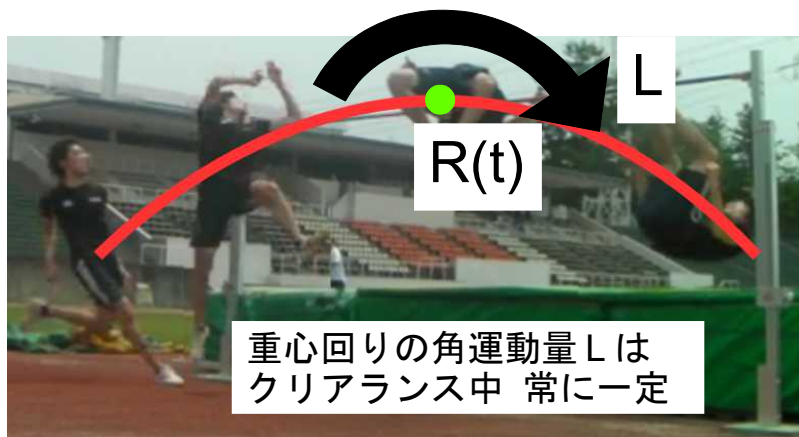


図 2.18: クリアランス中の角運動量

クリアランスに必要な角運動量（回転の勢い）は踏み切り動作で生み出されており，踏み切り後に空中で体をどのように動かそうと新たに角運動量を生み出すことはできない．クリアランスに必要な回転の勢いは踏み切り動作で生み出されていることを理解することが重要だ（ただし，空中で姿勢を変えて慣性モーメントを変化させれば，身体の一部を速く回転したり，遅く回転したりすることはできる）．

一例として木の棒が回転しながら空中に投げられた場合を考える．回転角速度は角運動量が保存するため変化せず，全体としては重心が放物線運動しながら，棒は重心の回りに一定角速度で回転して落下する．

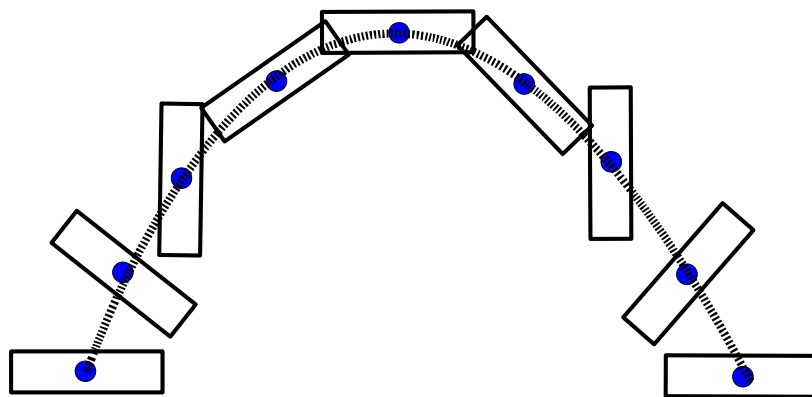


図 2.19: 空中に投げられた棒の軌道

## 2.6 遠心力と曲線助走

- 曲線を走れば遠心力によって自然と内傾した助走姿勢が作れる
- 遠心力が強くなる曲線軌道で助走すれば内傾角度を大きく取りやすい
- 助走の回転半径が小さくなるほど、  
速度が大きくなるほど遠心力は大きくなる

高跳びで曲線助走を行うときに体を内側に傾けることができるのは、選手の体に「遠心力」と呼ばれる力がかかるためである。この遠心力が強くなればなるほど図 2.20 に示すように選手は地面を蹴り出す角度  $\theta$  (内傾角度) を大きくすることが可能になる。

等速円運動する物体の遠心力は物体の質量を  $m$ 、動いている速度を  $v$ 、回転半径を  $r$  とすると以下の式で表される。

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad (2.23)$$

遠心力は、曲線助走の回転半径が小さくなるほど、また助走スピードが速くなればなるほど大きくなる性質がある。つまり、大きく体を内傾させて重心の低い助走を行いたい場合は、同じ助走経路で助走スピードを上げるか、助走経路を内側に入れることで曲線助走の回転半径を小さくすればよい。

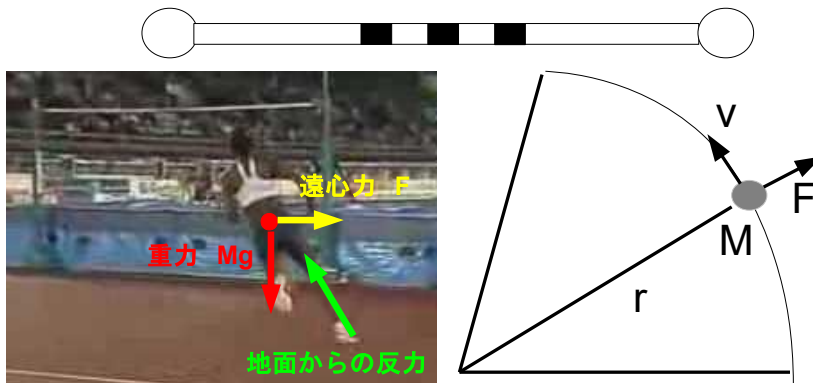


図 2.20: 助走軌道と遠心力

遠心力とはどのような力であろうか？. すでに述べたように高跳びにおいて、助走して踏み切り、マットに着地するまでに身体に働く力は3種類しかない.

1. 重力

質量を持つ物体に働く力. 地面に向かって引っ張られる力

2. 身体と接触したものから受ける力

作用・反作用の法則でいうところの反作用の力

3. 慣性力

加速する物体（座標系）に発生するみかけ上の力

遠心力とは実は慣性力と呼ばれる力の一種である. 加速する座標系から物体を見ると、物体は座標系が加速する向きと逆向きに力を受けているように見える. それが慣性力である.

例えば曲線助走中の内傾動作（助走中に体を内側に傾けて助走をしている姿勢）を考えてみる. このとき選手にかかっている力はどうなっているだろうか？. 内傾して走っている選手に働く力を「観客席から見た場合」と「選手から見た場合」の2通りに分けて考えてみる.

まず「観客席の座標系から見た場合」を考える.



図 2.21: 内傾して走る選手に作用する力（観客席から見た場合）

観客席は当然静止している. 加速する座標系ではなく静止した座標系から選手を見るのだから慣性力を考える必要はない. つまりこの場合は重力と物体が接触したものから受ける力の2つのみを考えれば良い.

重力は質量を持つ物体が地球の中心方向に引かれる力である. 物体（選手）が接触しているのは空気と地面だけである. 空気抵抗を無視すれば、選手が接触しているものから受け取る力は地面からの反発力のみである. 観客席から見た選手は地面からの反発力より重力のほうが強ければ重心は下がるし、地面からの反発力が内側を向いていれば選手は助走の内傾方向に傾いて動いていくように見える.

次に「選手に固定された座標系から見た場合」を考える。

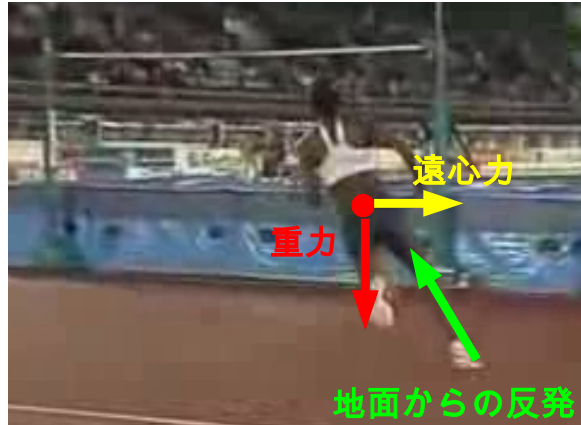


図 2.22: 内傾して走る選手に作用する力（選手から見た場合）

選手に固定された座標系から見た場合，選手と座標系は曲線助走の中心に加速しながら動く．こうした座標系で運動を扱う場合は慣性力を考えなければならない．

選手の助走を真上から見ると等速の円運動になっていると仮定すると，円運動では物体は円の中心方向に常に加速している（等速円運動の説明については後で詳しく触れるのでそちらを参照してほしい）．このとき，選手は円の中心から逆方向に慣性力を受けている．

等速円運動している物体が受ける慣性力は一般的に「遠心力」と呼ばれている．遠心力という言葉は馴染みがある言葉だと思う．図 2.22 に示すように，選手に固定された座標系から選手を見ると選手の体は重力，地面からの反発力，遠心力の三つの力を受けている．

例えば地面からの反発力（鉛直方向）と重力が釣り合い，地面からの反発力（水平方向）と遠心力がちょうどつりあっていたとする．選手に固定された座標系から選手を見ると，選手の体は静止して見える．このとき，選手は遠心力に負けないように曲線助走の回転中心方向に身体を傾けて，地面を蹴り出しているため静止しているように見えるのである．

逆に観客席から選手を見ると遠心力を考える必要がないので選手が身体を傾け曲線助走の回転中心に向かって蹴り出せば，身体もそれに合わせて回転の中心方向に移動して動いていく様子が観測できる．

加速する座標系から物体を見た場合と，静止する座標系から物体を見た場合で，物体に作用する力の考え方が異なる点に注意してほしい．

物体が半径  $r$  の円周上を速さ  $v$  で運動しているとき、物体が円周を 1 周するのにかかる時間を  $T$  とすると  $v = \frac{2\pi r}{T}$  であり、このとき単位時間あたりに半径が回転する角度を  $\omega$  とすると  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  となる。この  $\omega$  は角速度と呼ばれ、 $v = r\omega$  の式も成り立つ。

物体が等速円運動をしているときはその中心に向かって加速度  $a$  で近づいている。このとき微小時間  $\Delta t$  の間に物体は  $\omega\Delta t$  だけ回転する。ある時刻の速度を  $\vec{v}$ 、微小時間  $\Delta t$  後の速度を  $\vec{v}'$  とすると図 2.23 のようになる。

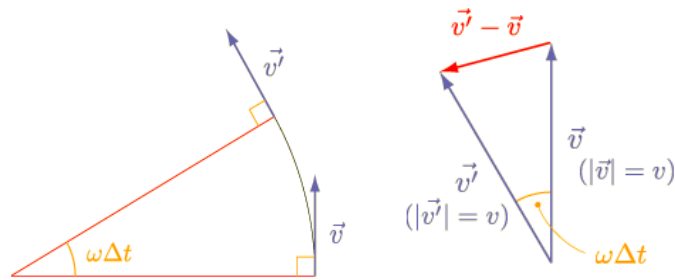


図 2.23: 遠心力の計算

ここで  $\Delta t$  が微小であることから

$$\Delta v = |\vec{v}' - \vec{v}| = v\omega\Delta t \quad (2.24)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = v\omega \quad (2.25)$$

となる。したがって円の中心に向かっていく加速度  $a$  は

$$a = v\omega = \frac{v^2}{r} \quad (2.26)$$

となることが分かる。

等速円運動とは円の中心に向かって加速する運動であり、式に示された通り回転半径が小さくなるほど、速度が大きくなるほど遠心力  $F = m\frac{v^2}{r}$  は大きくなる性質がある。

高跳び選手の曲線助走を考えた場合、選手とともにフィールド上を移動する座標系（つまり選手自身）から見れば、等速円運動をする選手は慣性力によって円の外側に押し出される力を受ける。これが遠心力と呼ばれている力の正体である。



## 2.7 曲率と曲率半径

曲線の一部に円を当てはめたとき、その円の半径を曲率半径、曲率半径の逆数を曲率という。走り高跳びの世界では助走の曲線軌道や、重心の上下方向の曲線軌道の曲がり具合を、「曲率半径」や「曲率」という言葉を使って説明されることが多い。

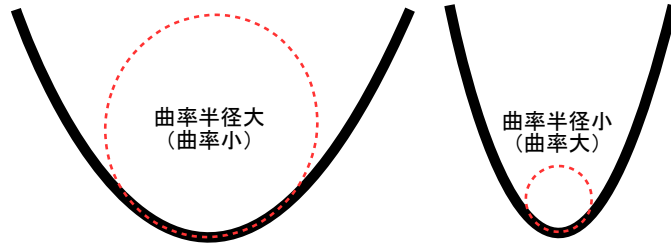


図 2.24: 曲率と曲率半径

例えば、踏み切り動作前後の重心の曲線軌道の曲率半径が大きい場合（曲率が小さい場合）、水平方向から鉛直方向への重心軌道の方向転換はスムーズに行われる。逆に曲率半径が小さい場合（曲率が大きい場合）、水平方向から鉛直方向への重心軌道の方向転換は難しくなり、速度が大きく減速したり、踏み切り脚に過剰な負荷がかかって踏み切りが潰れやすくなってしまふ。

## 2.8 動作分析に必要な基礎知識

- 物体の運動はニュートンとオイラーの運動方程式で決まる

### 関節モーメントについて

- 関節モーメントとは関節にかかる力のモーメントを表す
- 関節モーメントが正なら関節を底屈・伸展する方向に負なら背屈・屈曲する方向にモーメントがかかる
- 関節モーメントは地面からの反力と関節の位置，重量，重心位置，慣性モーメントなどの身体パラメータが分かれば計算できる
- 関節モーメントは脚が地面に着いているときは地面からの反力の影響が大きく脚が地面についてないときには慣性力の影響が大きい

### パワーについて

- パワーは関節モーメントに関節角速度をかけたものである
- パワーが正の場合は筋は求心性収縮を起こし，パワーが負の場合は筋は遠心性収縮を起こしている

助走や踏み切りの動作中に筋肉がどのような力を発揮しているか知ることには動作の理解を深めたり，トレーニング方法を考える上で大変有意義である。筋肉がどのような力を発揮しているか知するためには「関節モーメント」「パワー」を分析すればよい。こうした人の力の発揮形態を力学的に探究する学問分野はバイオメカニクスと呼ばれる。

ここでは主に関節モーメントやパワーなどを分析するバイオメカニクスの基礎知識について解説する。まず，関節モーメントとパワーを分析するために必要な力学の基礎知識について解説し，最後にその詳細な計算方法について説明する。関節モーメントやパワーの分析例は，踏み切り動作を解説する章で具体的な分析結果を取り上げて紹介する。

### 2.8.1 物体の運動を決める運動方程式

ここでは空間を運動する物体の運動方程式について説明する。少し応用的な内容であるため年少者の読者は読みとばしてほしい。

物体の位置を完全に指定するのに必要な最低限度の実数の数を「自由度」と呼ぶ。ある大きさを持った物体の3次元運動を記述するためには物体の位置情報3個と物体がどちらを向いているかという角度情報（姿勢情報）3個の計6個の自由度が必要になる。従って物体の運動を記述するためには6個の独立な方程式があればよい。それがニュートンとオイラーの運動方程式である [33]。

いま一つの座標系（慣性座標系） $\Sigma_U(O_U - X_U Y_U Z_U)$  が与えられたとし、この座標系から見た物体の運動量を  $\mathbf{P}$ 、物体の重心  $G$  回りの角運動量を  $\mathbf{L}$ 、物体に働く外力の合計値を  $\mathbf{F}^{(ex)}$ 、重心  $G$  に関する外力のモーメントを  $\mathbf{N}^{(ex)}$ 、質量を  $m$ 、重心  $G$  の位置ベクトルを  $\mathbf{R}$  とするとこれまでの議論の帰結として

$$\mathbf{F}^{(ex)} = m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{N}^{(ex)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2.28)$$

が成り立ち、前者の式はニュートンの運動方程式として知られている。角運動量  $\mathbf{L}$  については物体の角速度ベクトルを  $\boldsymbol{\omega}$  とし、物体の任意の微小体積を  $dv$ 、その密度を  $\rho$ 、 $G$  からの位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とすると、この微小体積の角運動量は  $\mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \rho dv$  であり  $\frac{d}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  に注意して式をまとめると以下のようになる。（ $\mathbf{I}_3$  は  $3 \times 3$  の単位行列である）

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho dv = \int_V (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{I}_3 - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) \rho dv \boldsymbol{\omega} \quad (2.29)$$

ここで

$$\mathbf{I} = \int_V (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{I}_3 - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) \rho dv \quad (2.30)$$

を定義すると  $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$  となる。

$\mathbf{I}$  は慣性テンソルと呼ばれる物理量で物体の回転のしやすさを表す。座標系  $\Sigma_U(O_U - X_U Y_U Z_U)$  に対する物体の姿勢は刻々と変化するため、 $\mathbf{I}$  の成分は時刻とともに変化する。このため、計算はとても煩雑なものになってしまう。こうした問題を解決するため、通常は重心  $G$  に原点を持ち物体に固定した座標系で物体の運動を考えることが多い。

慣性テンソルは対称行列であり直交する3軸をうまく設定することで対角化することができる。こうした座標軸は慣性主軸と呼ばれる。典型的な形状の物体の慣性主軸に対する慣性テンソルの値は主慣性モーメントと呼ばれ、多くの力学の教書に掲載されている。人間の運動を力学的に扱う場合も、ほとんどの場合はこの主慣性モーメントが計算に利用される。

$\Sigma_U(O_U - X_U Y_U Z_U)$  座標系での運動を慣性主軸を持つ座標系  $\Sigma_B(O_B - X_B Y_B Z_B)$  の座標に移す回転行列  ${}^B\mathbf{R}_U$  を利用すれば、物体に固定された慣性主軸となる座標系  $\Sigma_B(O_B - X_B Y_B Z_B)$  での運動方程式を考えることができる。このとき、以下の式が成り立つ。これがオイラーの運動方程式である。

$${}^B\mathbf{I} \frac{d{}^B\boldsymbol{\omega}}{dt} + {}^B\boldsymbol{\omega} \times ({}^B\mathbf{I} {}^B\boldsymbol{\omega}) = {}^B\mathbf{N}^{(ex)} \quad (2.31)$$

ここで同一平面内の回転運動では  ${}^B\boldsymbol{\omega} \times ({}^B\mathbf{I} {}^B\boldsymbol{\omega}) = 0$  となることに注意して同一平面内の回転運動を考えれば

$${}^B\mathbf{I} \frac{d{}^B\boldsymbol{\omega}}{dt} = {}^B\mathbf{N}^{(ex)} \quad (2.32)$$

となり、シンプルな方程式を考えればよいことが分かる。

ただし  $\Sigma_U(O_U - X_U Y_U Z_U)$  座標系における  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{N}^{(ex)}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  を  $\Sigma_B(O_B - X_B Y_B Z_B)$  で表したものを  ${}^B\mathbf{L}$ ,  ${}^B\mathbf{N}^{(ex)}$ ,  ${}^B\mathbf{I}$ ,  ${}^B\boldsymbol{\omega}$  とすると、 ${}^U\mathbf{R}_B$  を  $\Sigma_B(O_B - X_B Y_B Z_B)$  の座標を  $\Sigma_U(O_U - X_U Y_U Z_U)$  の座標に移す回転行列として考えて

$$\mathbf{L} = {}^U\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{L} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{N}^{(ex)} = {}^U\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{N}^{(ex)} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{I} = {}^U\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{I} ({}^U\mathbf{R}_B)^T \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\omega} = {}^U\mathbf{R}_B {}^B\boldsymbol{\omega} \quad (2.36)$$

と表現することができる。

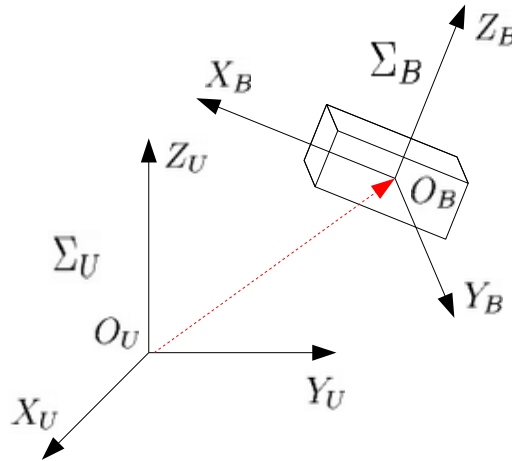


図 2.25: 基準座標系  $\Sigma_U(O_U - X_U Y_U Z_U)$  と物体の慣性主軸を持つ座標系  $\Sigma_B(O_B - X_B Y_B Z_B)$

## 2.8.2 偶力とモーメント 作用・反作用の考え方

ここでは偶力とモーメントと作用・反作用の考え方について説明する．逆方向に作用する大きさの等しい力を偶力と呼ぶ．また，その間の距離  $a$  をアーム長と呼ぶ．図 2.26 において任意の点  $O$  について 2 つの偶力  $P$  のモーメント  $M$  を計算すると点  $O$  の位置によらずその値は

$$M = P \cdot OD - P \cdot OC = P \cdot (OD - OC) = Pa \quad (2.37)$$

となり，偶力のモーメントは，原点の位置によらず  $Pa$  の大きさだけで決まることが分かる．つまり同一平面内に作用する偶力の大きさは原点の位置と無関係になる．また，偶力は並進運動に作用せず回転運動のみに作用し，モーメントの代数和がゼロであれば釣り合い状態となる．

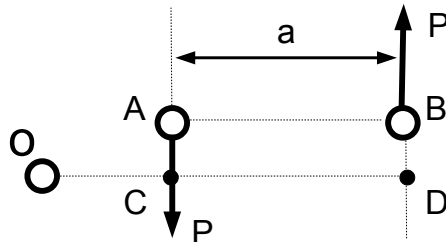


図 2.26: 任意の原点回りの偶力

次に図 2.27(a) の点  $A$  に作用する力  $P$  を考える．この力は (c) 図のように点  $B$  に作用する力  $P$  と偶力モーメント  $M = Pa$  に置換して考えることができる．これは (b) 図のように点  $B$  に逆方向で釣り合い打ち消し合う力が存在すると仮定して，偶力と力の作用に分解して考えられることで理解できる．これは，ある点に作用する一つの力の効果は別の点に作用する一つの力とモーメントに置き換えられることを意味している．

こうした考え方は関節に働く力のモーメントを考える場合も同様に適用が可能である．また，力のモーメントは関節点回りの回転矢印で表現されることが多い．

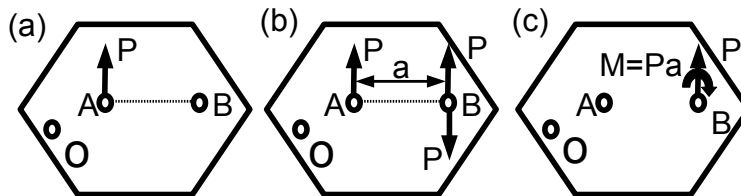


図 2.27: 力の分解

### 2.8.3 関節軸回りのモーメントの作用・反作用の考え方

図 2.28 に示すように筋力によって発生する関節の左右のモーメント  $\tau_j, \tau_i$  について考える。

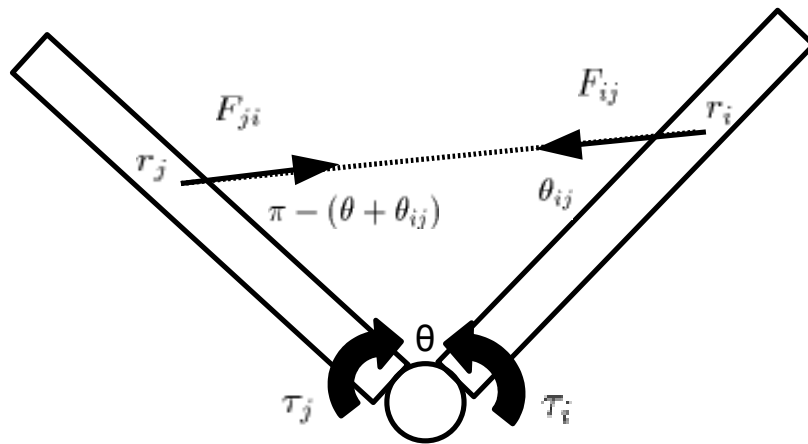


図 2.28: 関節モーメントの作用反作用

関節角度を  $\theta$ ,  $i$  番目の質点  $r_i$  と  $j$  番目の質点  $r_j$  の為す角度を  $\theta_{ij}$ ,  $F_{ij}$  を  $j$  番目の質点が  $i$  番目の質点に及ぼす力 (内力) として考える。関節の左右のモーメント  $\tau_j, \tau_i$  は以下のように計算される。

$$\tau_j = \sum_j \sum_i F_{ji} \sin\{\pi - (\theta + \theta_{ij})\} r_j \quad (2.38)$$

$$\tau_i = \sum_j \sum_i -F_{ij} \sin \theta_{ij} r_i \quad (2.39)$$

ここで作用・反作用の法則より  $F_{ji} = -F_{ij}$  であることと、余弦定理より

$$\frac{r_i}{\sin\{\pi - (\theta + \theta_{ij})\}} = \frac{r_j}{\sin \theta_{ij}} \quad (2.40)$$

であることに注意すると  $\tau_j = \tau_i$  となり、筋力によって発生する関節の左右のモーメント  $\tau_j, \tau_i$  は、作用・反作用の力によって、常に同じ大きさで逆方向となることが分かる。

## 2.8.4 関節モーメントとパワーの分析

ここまで解説してきた力学の基礎知識を用いれば関節に働く関節モーメントやパワーを計算することができる。

関節モーメントとは筋張力によって発生する、腕や脚などの関節軸回りのモーメントのことである。通常、関節が底屈・伸展する方向を関節モーメントの正、背屈・屈曲する方向を関節モーメントの負方向として扱うことが多い。

筋肉が求心性収縮（短縮性収縮）を起こしているか遠心性収縮（伸長性収縮）を起こしているか調べるためには通常、筋が発生するパワーを求める。

パワー  $P$  は関節モーメント  $M$ 、関節の角速度  $\omega$  のかけ算となる。パワーが正の場合は筋は求心性収縮を起こしており、パワーが負の場合は筋は遠心性収縮を起こしている。また、パワーは「速度と力の積」で表される物理量になっているため選手にとって直感的で理解しやすい（計測結果と感覚が一致しやすい）。

$$P = M\omega \quad (2.41)$$

運動中の関節モーメントやパワーは「地面からの反力（床反力）」「各関節の位置」「身体パラメータ（各セグメントの重心位置や慣性モーメント）」の三つの情報を測定することができれば計算することができる。

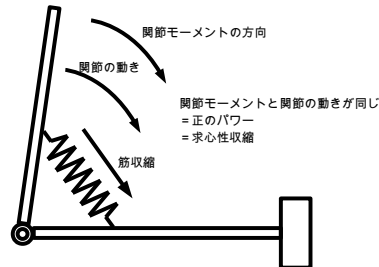


図 2.29: パワーと筋収縮の関係（求心性収縮）

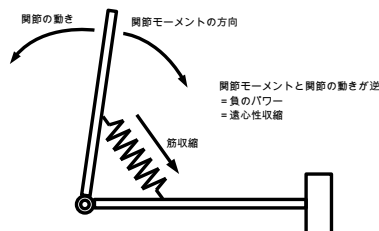


図 2.30: パワーと筋収縮の関係（遠心性収縮）

これまでも多くのバイオメカニクス研究において、地面からの反力を床反力計、各関節の位置をモーションキャプチャ、身体パラメータは過去の解剖学的知見を利用して、運動中に発生する関節モーメントとパワーが調べられてきた。

運動中の関節モーメントやパワーを求める手段としては、身体を複数のセグメントに分解し関節軸でリンク状に連結したリンク・セグメント・モデルがよく利用される。

例えば筋張力による関節モーメントは以下のようにして求めることができる [34]。まず、足関節を回転中心として足部に加わる力のモーメントを考える。足部加わる力は地面からの反力  $F$ ，足部の重力  $M_1g$ ，下腿部が足関節を通じて足部を押す力（関節間力） $F_3$ ，底屈筋の筋張力  $F_1$ ，背屈筋の筋張力  $F_2$  である。また、足部が加速度を持つことによる慣性力  $M_1a$  などが加わる。

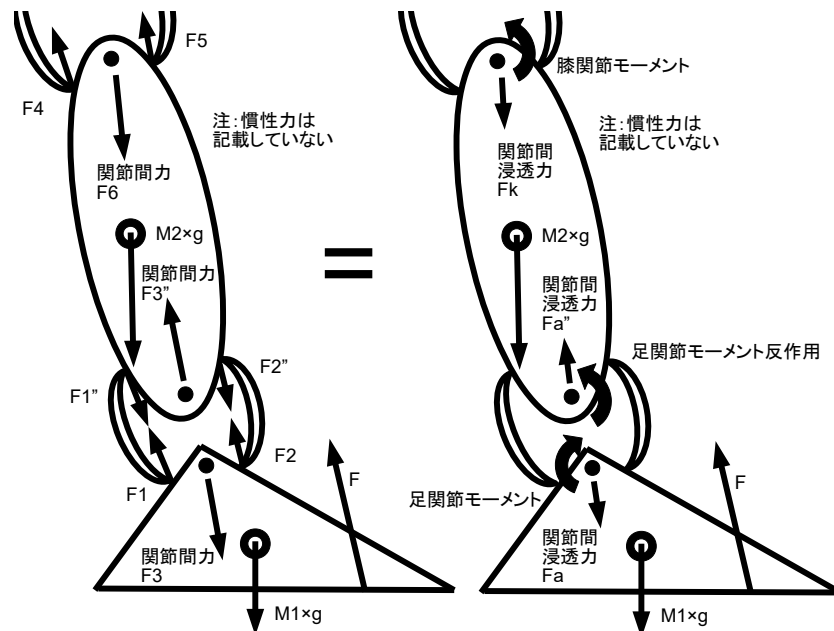


図 2.31: 関節にかかる力と関節モーメント

足部の慣性モーメントを  $I_1$ ，角加速度を  $\beta_1$  とすると  $I_1\beta_1$  は、地面からの反力  $F$  による力のモーメント，重力  $M_1g$  による力のモーメント，慣性力  $M_1a$  による力のモーメント，底屈筋の筋張力  $F_1$  による力のモーメント，背屈筋の筋張力  $F_2$  による力のモーメントの和で表される。

$I_1\beta_1$  は既に文献によって調べられた  $I_1$  の値や運動計測（モーションキャプチャなど）によって得られる  $\beta_1$  の値から計算できる。関節間力  $F_3$  は足関節中心を通るため、力のモーメントの影響を考慮する必要はない。地面からの反力・重力・慣性力は運動計測（モーションキャプチャなど）や地面からの反



力の計測値，身体重量  $M_1$ （文献値から体重比で推定することが多い）などから計算できる．以上の方法で底屈筋と背屈筋によって発生する足関節モーメントを計算することができる．

足関節モーメントが計算されれば膝関節モーメントも計算することができる [34]．膝関節を回転中心として下腿部に加わる力のモーメントを考えると下腿部に加わる力は足部と同様に重力，慣性力の他に足部が下腿部を押す関節間力  $F_3''$ （関節間力  $F_3$  の反力），足関節の底屈筋と背屈筋の筋張力の反力  $F_1''$  と  $F_2''$ ，大腿部からの関節間力  $F_6$ ，膝の伸展筋の筋張力  $F_5$ ，屈曲筋の筋張力  $F_4$  である．

これらの力によるモーメントの式を整理していくと，足部から下腿部に加わる力  $F_1''$ ， $F_2''$ ， $F_3''$  による力のモーメントは，足関節モーメントの反作用による力のモーメントと， $F_1''$ ， $F_2''$ ， $F_3''$  を合成した力 ( $F_a''$ ) による力のモーメントにまとめることができる．この小さな力  $F_a''$  は体節間浸透力と呼ばれ，足部の身体パラメータと加速度，地面からの反力から計算することができる．

このように考えれば足関節の場合と同様に，下腿部の慣性モーメントを  $I_2$ ，角加速度を  $\beta_2$  とすると， $I_2\beta_2$  と下腿部に作用する力のモーメントの総和が等しくなることから膝の伸展筋の筋張力  $F_5$ ，屈曲筋の筋張力  $F_4$  による膝関節モーメントの総和を計算することができる．

ここまで解説してきた関節モーメントの計算方法は、各体節の動き（角加速度）は体節に加わる力のモーメントの総和によって決まることを利用して計算している。

従って運動計測によって体節の動きを計測し、重力、慣性力、隣接する体節から受ける力、地面からの反力などの外力、などの影響を除いていくと純粹な筋張力による関節モーメントを計算することができる。

実際の計算の流れは図 2.32 に示すような流れとなり地面からの反力と関節位置の計測、身体パラメータが分かれば関節モーメントを計算することができる。ただし図中の角度とは鉛直方向に対する角度である点に注意が必要である。関節モーメントは末梢部位から順次計算していき、足関節モーメントから順番に上位の関節モーメントを計算していく。

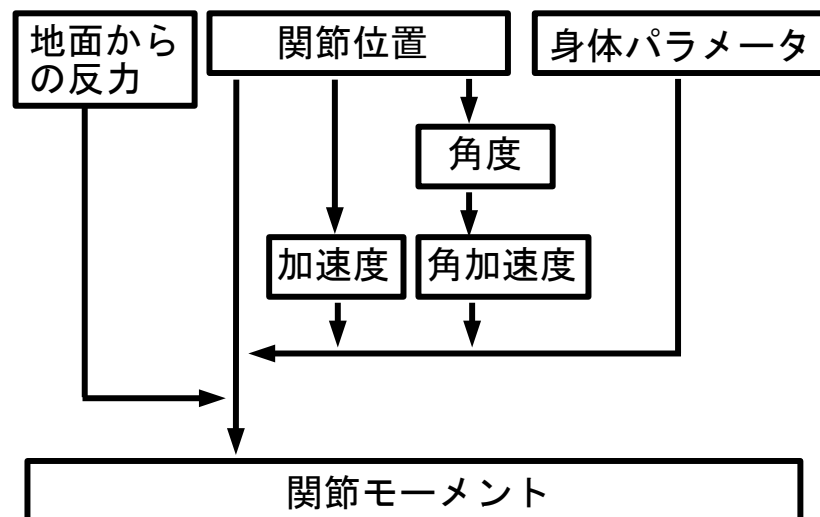


図 2.32: 関節モーメント計算の流れ [34]

地面に足が接地している通常の歩行動作やランニング動作においては、地面からの反力によるモーメントが関節モーメントに与える影響が大きいことが知られている [34].

例えば歩行中の足関節においては、地面からの反力ベクトルが足関節の前方を通る場合には、足関節まわりの地面からの反力によるモーメントは足関節を背屈させる方向に働く。このとき人間は足関節を底屈させる方向に力を入れて関節モーメントを発生させる。

膝関節まわりでも同様に、地面からの反力ベクトルが膝の後方を通る場合は、地面からの反力によるモーメントは膝関節を屈曲させる方向に働く。このとき人間は膝関節を伸展させる方向に力を入れて関節モーメントを発生させる。股関節についても同様に考えることができる。

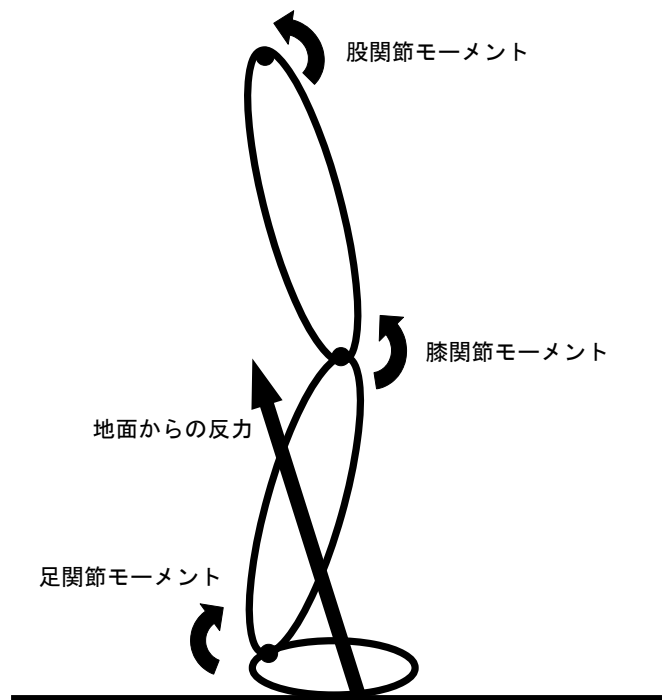


図 2.33: 立脚中の地面からの反力モーメントと関節モーメント

このように地面からの反力が関節に対してどの位置に働いているか考えることはスポーツ選手にとって極めて重要である。地面からの反力の方向が関節軸から離れるほど、力が強くなるほど関節にかかる負荷は大きくなる。例えば踏み切り動作で地面からの反力の方向が関節軸から大きく離れた方向を向いていれば関節負荷が高くなり、踏み切り動作で潰れたり、関節を怪我したりする原因になる。

経験的には踏み切り動作で間延びして、接地ポイントが腰に対して前に出過ぎれば、踏み切り動作で膝関節にかかる負荷が高くなり潰れた踏み切りになることが多い。

一方でランニング動作において地面から脚が浮いているときには地面からの反力は存在せず、慣性力の影響が大きくなる。慣性力は身体各部の加速度に比例して大きくなるため、動きの速い走行中の遊脚期には大きな慣性力が関節に負荷を与える。

関節モーメントの計算式は地面に脚が着いていても離れていても共通であるが、高跳びをやっている場合は、地面に脚が着いていれば地面からの反力の影響が大きく、離れていれば慣性力の影響が大きいと単純に考えればよいだろう。

また、関節モーメントが分かれば、関節の角速度からパワーが計算でき、パワーが計算できれば筋肉が求心性収縮（短縮性収縮）を起こしているのか遠心性収縮（伸長性収縮）を起こしているのかを知ることができる。競技動作中の筋肉の収縮形態を詳細に調べれば、競技動作に効果の大きいトレーニング方法の考案や、怪我を予防するための動作修正、競技力を高めるシューズやウェアの設計などが可能となる。

今では関節モーメント分析用の計測器やソフトウェアが数多く市販されており、様々なスポーツ動作の筋負荷が詳細に分析されている。著者である私の場合も筋骨格シミュレータ（*AnyBody* や *SIMM* などが有名）などのソフトウェアを用いて動作解析を行ってきた技術者の一人である。日本では臨床歩行研究会がこの分野の研究をリードしており、今も日進月歩で研究が進んでいる。